ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس: مجموعة

درس رقم 1/

الأستاذ: نجيب عثماني

الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية الحسابيات

مستوى الجذع مشترك علمي

القدرات المنتظرة:

توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جذاء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

أهداف الدرس:

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- تحديد قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.

I. قابلية القسمة في المجموعة $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

ترميز:

الأعداد الصحيحي الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$.

الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$. و نكتب $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ و $\mathbb{N}^*=\{1,2,\cdots\}$

قواسم عدد_مضاعفات عدد:

تعريف:

a و b عنصران من $\mathbb{N}$.

إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a=bn$, نقول ان:

b قاسم للعدد a أو b يقسم a.

a مضاعف للعدد b.

a يقبل القسمة على b.

مضاعفات العدد b تكتب على الشكل bn حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

مثال: ادينا: $145=5\times 29$

إذن: - العدد 145 مضاعف للعددين 5 و 29 .

- العددان 5 و 29 هما قاسمان للعدد 145.

ملحوظة: العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية:

تعريف:

كل عدد صحيح طبيعي a قابل للقسمة على 2 يسمى عددا زوجيا و يكتب على الشكل: $a=2n$ حيث n ينتمي الى $\mathbb{N}$.

كل عدد صحيح طبيعي a غير قابل للقسمة على 2 يسمى عددا فرديا و يكتب على الشكل: $a=2n+1$ حيث n ينتمي الى $\mathbb{N}$.

مثال: الأعداد: 0, 108 , 304, 202, 1006 هي أعداد زوجية.

الأعداد: 1, 13, 165, 209, 2007 هي أعداد فردية.

الأستاذ: عثماني نجيب

تمرين1 محلول : مضاعفات عدد معلوم
لنحدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59
الجواب :
لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.
مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث n من $\mathbb{N}$ و المحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 9×3 و 9×4 و 9×5 و 9×6. أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.
و بالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.
تمرين2 محلول : نضع: $x = 3\times5\times7\times12$ و $y = 2\times5\times3\times5$.
دون حساب x و y نبين أن:
75 قاسم للعدد y.
105 قاسم للعدد x.
الجواب :
لدينا $y = 2\times5\times3\times5$ أي أن: $y = 2\times75$ و منه فان 75 قاسم للعدد y.
لدينا $x = 3\times5\times7\times12$ أي أن: $x = 105\times12$
و منه فان 105 قاسم للعدد x.
تمرين3 محلول : التمييز بين عدد زوجي و عدد فردي – قابلية القسمة على 3:
ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$
نضع $x = 2n+7$ و $y = 4n+2$.
لنبين أن x عدد فردي و y عدد ومجي.
لنبين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 3.

إذا كان k عنصرا من $\mathbb{N}$ فان $2k$ عدد زوجي و $2k+1$ عدد فردي.

الجواب :
لدينا $x = 2n+7$ أي أن: $x = 2(n+3)+1$
و بالتالي x عدد فردي لأن: $x = 2k+1$ حيث: $k = n+3$
و لدينا $y = 4n+2$ أي أن $y = 2(2n+1)$
و بالتالي y عدد زوجي لأن: $y = 2k$ حيث: $k = 2n+1$
و لدينا $x+y = 2n+7+4n+2$ أي أن: $x+y = 6n+9$
و بالتالي $x+y = 3(2n+3)$ اذن $x+y$ مضاعف للغدد 3.

لكل k من $\mathbb{N}$ العدد $3k$ مضاعف للعدد 3.

مصاديق قابلية القسمة على: 2, 3, 4, 5, 9.

خاصية:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا. يكون العدد n قابلا للقسمة:
على 2: اذا كان رقم و حداته هو : 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.
على 3: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3.
على 4: اذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.
على 5: اذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.
على 9: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9.
أمثلة: العدد 4752 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5,
العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9.
لأن العدد (5+2+7+4)=18 مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 9.
العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته هو 8.
العدد 1628 مضاعف للعدد 4 لأن رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 و هو مضاعف للعدد 4.

الأعداد الأولية:

تعريف:

عدد أولي هو كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين فقط هما العدد 1 و العدد a.
مثال: الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
التفكيك إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يكتب على شكل عوامل جداء عوامل أولية.

الأستاذ: عثماني نجيب

مثال: لدينا: $640 = 64\times10$ أي $640 = 8^2\times2\times5$

إذن: $640 = \left(2^3\right)^2\times2\times5$

و منه: $640 = 2^7\times5$

العوامل المكونة لهذا الجداء هي الأعداد الأولية 2و 5.

> الكتابة $640 = 2^7\times5$ تسمى تفكيك العدد 640 الى جداء عوامل أولية.

تمرين1 محلول : لندرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

الجواب :

بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0, فان 3611690 يقبل القسمة على 2 و 5.

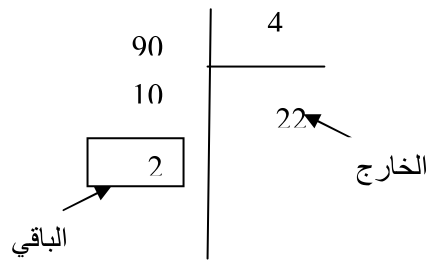
العدد 90 لا يقبل القسمة على 4.

إذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.

مجموع أرقام العدد 3611790 هو 27. (27=3+6+1+1+7+9+0)

و 27 مضاعف للعدد 3, إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.

و بما أن 27 مضاعف للعدد 9 فان 3611790 يقبل القسمة على 9.



تمرين2 محلول :

هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.

و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين2 : توظيف التفكيك إلى جداء عوامل أولية:

نضع $a = 1530$ و $b = 612$.

لنبسط العدد $\frac{a}{b}$.

لنكتب العدد $\sqrt{ab}$ على الشكل $m\sqrt{n}$ حيث m و n عنصران من $\mathbb{N}$.

II. القاسم المشترك الأكبر :

تعريف:

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين.

أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

و يرمز له بالرمز $PGCD\left(a;b\right)$.

مثال: قواسم العدد 12 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 12.

قواسم العدد 15 هي: 1 و 3 و 5 و 15.

إذن: $PGCD\left(12;15\right) = 3$

تعريف:

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.

إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1.

فإننا نقول : a و b أوليين فيما بينهما.

مثال: قواسم العدد 8 هي 1 و 2 و 4 و 8.

قواسم العدد 15 هي 1 و 3 و 5 و 15.

إذن $PGCD\left(8;15\right) = 1$

و منه فان 8 و 15 أوليين فيما بينهما.

III. المضاعف المشترك الأصغر:

تعريف: ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.

أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين a و b .

يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

و نرمز له بالرمز $PPCM\left(a;b\right)$.

مثال: مضاعفات العدد 12 هي 0 و 12 و 24 و 36 و 48 و 60 و 72 و.........

مضاعفات العدد 8 هي: 0 و 8 و 16 و 24 و 32 و 40 و 48 و.........

إذن: $PPCM\left(12;8\right) = 24$.