الدرس الأول: مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ومبادئ في الحسابيات

I) تقديم:

-- المجموعة $\mathbb{N}=\{0,1,2,3......\}$ تسمى مجموعة الأعدادالصحيحة الطبيعية.

--المجموعة $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$ تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة.

II) قابلية القسمة في المجموعة $\mathbb{N}$.

1) قواسم عدد صحيح طبيعي:

a)تعريف:

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين و b غير منعدم.

نقول إن a قابل للقسمةعلىb أو b يقسمa ونكتب a/b إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعيk بحيث a=bk.

b)ملاحظات:

- العدد1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.
- كل عدد صحيح طبيعي مخالف ل1يقبل على الأقل قاسما ن هما 1 ونفسه.

c) خاصيات:

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية.

-- إذا كان a يقسمb و b يقسم c فإن a يقسم c.

-- إذا كان a يقسمb و b يقسم a فإن a يساوي b.

-- إذا كان a قاسما للعددين b و c فإن a قاسم لكل من العددين:

b+c و b-c

-- إذا كان a قاسما للعدد b فإن a قاسم للعددbc.

البرهان على شكل تمارين.

d)نتائج: مصاديق قابلية القسمة على2 و3 و4 و5 و 9 .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، يكون n قابلا للقسمة:

على2: إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8 .

على4: إذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا قابلا للقسمة على 4 .

على5 : إذا كان رقم وحداته هو0 أو5.

على9: إذا كان مجموع أرقامه قابل للقسمة على 9.

2) الأعداد الزوجية والأعداد الفردية:

a)تعاريف:

-- كل عدد صحيح طبيعيa قابل للقسمة على2 يسمى عددا زوجيا.

و يكتب على الشكل a=2p حيث p عدد صحيح طبيعي.

-- كل عدد صحيح طبيعيa غير قابل للقسمة على2 يسمىعددا فرديا.

و يكتب على الشكل a=2p+1 حيث p عدد صحيح طبيعي.

b) ملاحظات:

-- كل عدد صحيح طبيعي يكون إما عددا زوجيا وإما عددا فرديا.

-- يكون عدد صحيح طبيعي زوجيا إذا كان رقم وحداته زوجي.

-- يكون عدد صحيح طبيعي فرديا إذا كان رقم وحداته فرديا.

c) خاصيات:

-- إذا كا ن a و b عددين صحيحين طبيعيين زوجيين فإن المجموعa+b والفرق a-b زوجيان والجداء ab زوجيا .

-- إذا كا ن a و b عددين صحيحين طبيعيين فرديين فإن المجموعa+b والفرق a-b زوجيان والجداء ab فردي.

-- إذا كا ن a زوجي و b فردي فإ ن المجموع a+b والفرقa-b فرديان و الجداء ab زوجي.

-- إذا كا ن a و b عددين صحيحين طبيعيين متتابعين فإن المجموعa+b والفرقa-b فرديان والجداء ab زوجي.

البرهان على شكل تمارين.

تمارين تطبيقية:

1) هل العدد 4218 قابل للقسمة على كل من: 2 و3 و4 و5 و9 .

2) ضع الرقم المناسب مكان كل علامة ⊗ لكي تحصل على عدد قابل للقسمة على2 و9 . $.13\otimes 2, 54\otimes\otimes, 6\otimes 1\otimes$

3) أدرس زوجية الأعداد الصحيحة الطبيعية التالية: $n\in\mathbb{N}$

$$3n+6, 4n+2, 8n+7, 2n+3, (n+2)(n+3)$$

$$2n^2+4n+5, n^2+2n+2, 1+(n+1)^2+(n+2)^2$$

4) ليكن $n\in\mathbb{N}$. بين أنه:

_ إذا كان n زوجيا فإ ن n^2 زوجي و العكس صحيح.

_ إذا كان n فرديا فإ ن n^2 فردي و العكس صحيح.

3) مضاعفات عدد صحيح طبيعي:

a)تعريف:

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين و b غير منعدم.

نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعيk بحيث a=bk.

b)ملاحظات:

--العدد0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

-- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لا نهاية من المضاعفات .

-- للعدد0 مضاعف وحيد هو الصفر .

-- كل عدد صحيح طبيعي a هو مضاعف لنفسه و للعدد 1.

c) خاصيات:

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية.

--إذا كانb مضاعفا ل a و c مضاعف ل b فإن c مضاعف ل a.

--إذا كانb و c مضاعفين ل a فإن b+c وb-c مضاعفان لa .

--إذا كانb مضاعفا ل a فإن الجداء bc مضاعف ل a لكل c من $\mathbb{N}$.

البرهان على شكل تمارين.

تمارين تطبيقية:

1) حدد مضاعفات 18 و مضاعفات 24 التي هي أصغر من 200.

2) حدد جميع الأعداد الزوجية القابلة للقسمة على 4 و5 و المحصورة بين 201 و 351.

3) بين أنه إذا كان a مضاعفا ل b^2 فإن a مضاعف ل b.

4) بين أنه إذا كا ن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية زوجية متتابعة فإن المجموع a+b+c يكون مضاعفا للعدد 6 .

5) بين أنه إذا كانb و c مضاعفين ل a فإن 2c+3b مضاعف لa.

4) الأعداد الأولية:

a)تعريف: ليكنp عدد صحيح طبيعي.

نقول إن p عددا أوليا،إذا كان يقبل قاسمان فقط وهما 1 و p.

b)ملاحظات:

1) لتحديد الأعداد الأولية الأصغر من عدد معلوم نتبع الطريقة التالية:

2 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

3 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

5 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

....

. نستمر هكذا إلى أن نحصل على جدول الأعداد الأولية المطلوب.

2) طريقة لتحديد ما إن كان عددا أوليا أم لا.

a) ليكن n عدد صحيح طبيعي.

نبدأ بتحديد جميع الأعداد الأولية p التي تحقق $p^2\le n$

– إذا كان n يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد، نقول إن n ليس أوليا.

– إذا كان n لا يقبل القسمة علىأي عدد من هذه الأعداد، نقول إن n عددا أوليا.

b) لكي نتحقق هل n أولي يمكن اتباع الخوارزمية التالية:
نقوم بقسمة n على الأعداد الأولية p انطلاقا من 2 على التوالي ونقف عند إحدى الحالات:
– إذا أصبح الخارج q أصغر من p قطعا، والباقي غير منعدم فإن n عدد أولي.
– إذا حصلنا على باقي منعدم. فإن n غير أولي.

c)أمثلة: لائحة الأعداد الأولية الأصغر من 100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

5) تفكيك عدد غير أولي إلى جداء عوامل أولية:

a)أمثلة: $60=2^2\times3\times5$ و $12=2\times3\times3$

b)خاصية:
كل عدد صحيح طبيعي n غير أولي أكبر من 1 يمكن تفكيكه إلى جداء عوامل أولية. حيث: $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$
–الأعداد p_i أولية موجبة ومختلفة مثنى مثنى.
–الأعداد α_i طبيعية غير منعدمة.

c) ملاحظة:
كل عدد أولي p أكبر من 2 هو عدد فردي.

d)كيفية تفكيك عددغير أولي إلى جداء عوامل أولية:

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$540=2^2\times3^3\times5$

III) القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

1) قاسم مشترك عددين – مضاعف مشترك عددين.

a)تعاريف:
--يكون عدد صحيح طبيعيd قاسما مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a وb إذا كان قاسما لكل منهما.
-- يكون عدد صحيح طبيعيm مضاعفا مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a وb إذا كان مضاعفا لكل منهما.

b)أمثلة:
1) قواسم 12 هي:1 و2 و3 و4 و6 و12.
قواسم 18 هي: 1 و2 و3 و4 و6و 9 و18.
1 و2 و3 و4 و6 هي القواسم المشتركة للعددين 12 و18
2) 12 و24 و36 و... مضاعفات مشتركة للعددين 4 و6.

2) القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغرلعددين:

a)تعاريف:
–القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيينa وbهو أكبر القواسم المشتركة لكل منa وb.
ويرمزله ب: $p\gcd(a,b)=a\wedge b=\Delta(a,b)$
– المضاعف المشترك الأصغرلعددين صحيحين طبيعيين a وb هوأصغر المضاعفات المشتركة لكل من a وb.
ويرمزله ب: $ppcm(a,b)=a\vee b=M(a,b)$

b)أمثلة:
$p\gcd(12,30)=6;;;;ppcm(4,6)=12$

c) نتائج:
ـ القاسم المشترك الأكبرلعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أصغر أس.
ـ المضاعف المشترك الأصغرلعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أكبر أس. إضافة إلى العوامل الغير المشتركة.
مثلا:

632	2	76	2
316	2	38	2
158	2	17	17
79	79	1	
1			

لدينا: $632=2^3\times79$ و$76=2^2\times17$

إذن:
$$632\wedge76=2^2=4$$
$$632\vee76=2^3\times19\times79=12008$$

3) الأعداد الأولية فيما بينها:

a)تعريف:
نقول إنa وb من $\mathbb{N}$ أوليان فيما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر هو1 ونكتب: $a\wedge b=1$.

b)أمثلة:
$3\wedge5=1$ و$2\wedge3=1$ و $12\wedge11=1$

تمارين تطبيقية:

تمرين1:
1)حددd القاسم المشترك الأكبرللعددين:
$p=118404$ و $q=13884$
2)أحسب: $p'=\frac{118404}{d}$ و $q'=\frac{13884}{d}$
3)تحقق أن: p' و q' أوليان فيما بينهما ثم إستنتج الشكل المختصر للكسر: $\frac{118404}{13884}$

تمرين2:
نعتبر الأعداد التالية:
$a=2^2\times5^3\times7^4,b=2^3\times5^4\times7^4,c=2^2\times5^2\times7^3\times11$
1) حدد pgcd(a,b,c) و ppcm(a,b,c) .
2) بين أن العدد b مضاعف للعدد a .
3) هل العدد a يقسم العددc .

تمرين3: نعتبر العدد: $x=2\times3\times4\times5\times6$
1) حدد باقي وخارج القسمة الإقليدية للعدد x+1 على2 و3 و4 و5 و6 .
2) هل العدد x+1 أولي؟
3) هل الأعداد: x+2 و x+3 و x+4 و x +5 و x+6 أعداد أولية؟