Arithmétique et ensemble de nombres
الحسابيات / مجموعات الأعداد

I. Nombres Entiers naturels | I. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية:

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية بالرمز IN ونكتب: IN={0 , 1 , 2 , 3 , 4,……
المجموعة IN مجموعة غير منتهية لأنه إذا كان عدد **n** ينتمي الى IN، فإن العدد الموالى له وهو $n+1$ ينتمي كذلك الى IN.

II. Division Euclidienne | II. القسمة الأقليدية:

1) أمثلة:
املأ الفراغات في الجدول التالي:

الباقي	الخارج	المقسوم عليه	المقسوم	القسمة ألأقليدية
2	**3**	**5**	**17**	$17=5\times3+2$
				$658=13\times\ldots+\ldots$
		13	185	$185=\ldots\times\ldots+\ldots$
4	29	8		$\ldots.=\ldots\times\ldots+\ldots$

2) مبرهنة:

مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي a والعدد الصحيح الطبيعي غير المنعدم b
يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r بحيث: $a=bq+r$ و $0\le r\le b-1$
تسمى هذه العملية بالقسمة الأقليدية للعدد a على العدد b أما العددان q و r فيسميان على التوالي بخارج وباقي القسمة الأقليدية.

3) تطبيق:
حدد خارج وباقي القسمة الأقليدية للعدد 12356 على 113 .
إجابة: ....
ماهي البواقي الممكنة لعدد ما على العدد 7 ؟
إجابة: ....
ماهو عدد البواقي الممكنة لعدد ما على العدد 123 ؟
إجابة: ....
ماهو عدد البواقي الممكنة لعدد ما على العدد 2 ؟ كيف تسمى هذه الأعداد حسب قيمة الباقي؟
إجابة: ....
....
....

III. Les Nbs paires et Impaires | III. الأعداد الفردية و الزوجية:

1) أمثلة :
الأعداد مثل **0** ; **2** ; **4** ; **6** ; ……تسمى أعداد زوجية و الأعداد مثل **1** ; **3** ; **5** ; **7** ; ……تسمى أعداد فردية

2) تعريف:

a عدد صحيح طبيعي.
a عدد زوجي يعني أن $a=2k$ بحيث $k\in IN$
a عدد فردي يعني أن $a=2k+1$ بحيث $k\in IN$

Arithmétique et ensemble de nombres
الحسابيات / مجموعات الأعداد

3) عمليات على الأعداد الفردية والزوجية:

مجموع وفرق عددين ليس لهما نفس الزوجية هو عدد	مجموع وفرق عددين لهما نفس الزوجية هو عدد ....
يكون جداء عددين أو أكثر زوجيا إذا كان .... هذه الأعداد	يكون جداء عددين أو أكثر فرديا إذا كانت هذه الأعداد ....

4) تطبيق:

حدد معللا جوابك زوجية الأعداد التالية بحيث $n \in IN$:

$a = 2(n-1)+17$ إجابة: ....

$b = n(n+1)$ إجابة: ....

$c = 4n^2 - 4n + 1$ إجابة: ....

IV. المضاعفات و القواسم: | IV. *Multiples et Diviseurs*

1) أمثلة :

الأعداد مثل $0 ; 2 ; 4 ; 6 ;$ ...... يمكن كتابتها على شكل .... إذن هي مضاعفات للعدد ....
الأعداد مثل $0 ; 3 ; 6 ; 9 ;$ ...... يمكن كتابتها على شكل .... إذن هي مضاعفات للعدد ....
الأعداد مثل $0 ; 7 ; 14 ; 21 ;$ ...... يمكن كتابتها على شكل .... إذن هي مضاعفات للعدد ....

2) تعريف:

a عدد صحيح طبيعي و p عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
(a مضاعف للعدد p) يعني أن (p قاسم للعدد a) يعني أن ($a = p.k$ بحيث $k \in IN$)

3) تطبيق:

a. حدد الشكل العام لمضاعفات العدد 13 وحدد مضاعفاته الموجودة بين 27 و 253 .
إجابة: ....
....
....

b. حدد $D(12) ; D(45) ; D(72) ; D(7)$ مجموعات قواسم الأعداد $12 ; 45 ; 72 ; 7$ على التوالي.
إجابة:

$D(12) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 12\}$; $D(45) = \{1 ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; 45\}$

$D(72) = \{1 ; 2 ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; 36 ; 72\}$; $D(7) = \{ \quad \}$

4) عمليات على المضاعفات والقواسم:

خاصية عامة:

- إذا كان العدد c قاسما مشتركا للعددين a و b فإن c يقسم $a+b$ و $a-b$ وبصفة عامة يقسم كل عدد على شكل $ka+mb$ مع k و m عددين صحيحين.
- إذا كان العددان a و b مضاعفان مشتركان للعدد c فإن $a+b$ و $a-b$ مضاعفان للعدد c وبصفة عامة فإن كل عدد على شكل $ka+mb$ يكون مضاعفا للعدد c ، مع k و m عددين صحيحين.

Arithmétique et ensemble de nombres
الحسابيات / مجموعات الأعداد

V. Le PGDC et Le PPMC		V. القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر:

1) الأعداد الأولية فيما بينها:

العددان **12** و 35 ليس لهما أي قاسم مشترك ما عدا 1.
نقول أن **12** و 35 أوليان فيما بينهما وأن قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 ونكتب: $\mathbf{12 \wedge 35 = 1}$

تعريف:
a و b عددان صحيحان طبيعيان .
نقول أن **a** و **b** أوليان فيما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الوحيد هو 1 . ونكتب: $\mathbf{a \wedge b = 1}$

2) القاسم المشترك الأكبر

نعتبر العددين **42** و 36 لدينا :
$M(36) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18, 36\}$; $D(42) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42\}$
القواسم المشتركة للعددين **42** و 36 هي **1 ; 2 ; 3 ; 6** . وهكذا يكون العدد **6** هو القاسم المشترك ألأكبر للعددين **42** و 36
نكتب : $42 \wedge 36 = 6$ أو $PGCD(42 ; 36) = 6$

خاصية عامة:
a و b عددان صحيحان طبيعيان .
نرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين **a** و b : $\mathbf{a \wedge b}$ أو $\mathbf{pgcd(a,b)}$ ويحقق ما يلي:

- $(\mathbf{d = a \wedge b})$ يعني وجود عددين صحيحين **a'** و **b'** أوليان فيما بينهما بحيث $\begin{cases} \mathbf{a = d.a'} \\ \mathbf{b = d.b'} \end{cases}$
- كل قاسم مشترك للعددين **a** و b يقسم قاسمهما المشترك الأكبر $\mathbf{d = a \wedge b}$

3) المضاعف المشترك الأصغر:

نعتبر العددين 12 و 20 لدينا :
$M(20) = \{0 ; 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ; ... \}$; $M(12) = \{0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; ... \}$
الأعداد 12 و 20 لهما عدد غير محدود من ألمضاعفات المشتركة غير المنعدمة لكن أصغر هذه المضاعفات هو العدد 60 .
ونكتب: $12 \vee 20 = 60$

خاصية عامة:
a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .
المضاعف المشترك الأصغر للعددين هو أصغر مضاعف غير منعدم للعددين a **و** b **ونرمز له :** $a \vee b$ **أو** $ppmc(a,b)$ **ويحقق ما يلي:**

- **كل مضاعف مشترك للعددين** a **و** b **هو مضاعف لمضاعفهما المشترك الأصغر** $\mathbf{m = a \vee b}$

VI. Détermination du PGDC		VI. تحديد القاسم المشترك الأصغر :

تنجز هذه الفقرة في دفتر التمارين من خلال إنجاز الأنشطة التالية:

Activité :	1.	*Dans cette activité, on veut déterminer le PGCD de 36 et 24.*	.	نشا

1ère méthode : Liste des diviseurs.

1. Donner la liste des diviseurs de 60 :

… … … … … … … … … … … …

2. Donner la liste des diviseurs de 48 :

… … … … … … … … … …

3. En déduire le PGCD de 60 et 48 : PGCD(60 ; 48) = …

Cette méthode permet, en utilisant sa définition, de déterminer PGCD(60 ; 48).
Pourtant, la recherche de TOUS les diviseurs d'un nombre entier est souvent longue et pénible, c'est pourquoi, on va mettre en place une nouvelle méthode de recherche de PGCD.

2ème Méthode : Méthode des soustractions successives.

1. Soustraire le plus petit des deux nombres au plus grand :

	6	0
-	4	8
	1	2

2. On prend les deux plus petits et on recommence :

	4	8
-	1	2
	3	6

3. On continue jusqu'à obtenir un résultat nul :

	3	6		…	…		…	…
-	1	2	-	…	…	-	…	…
	…	…		…	…			0

4. Le PGCD est le dernier résultat non nul.

Donc PGCD(60 ; 48) = …

Applications :

1. En utilisant la même méthode des soustractions successives, déterminer le PGCD de 295 et 177 :

	2	9	5		…	…	…		…	…	…
-	1	7	7	-	…	…	…	-		…	…
	…	…	…			…	…			…	…

Donc PGCD(295 ; 177) = …

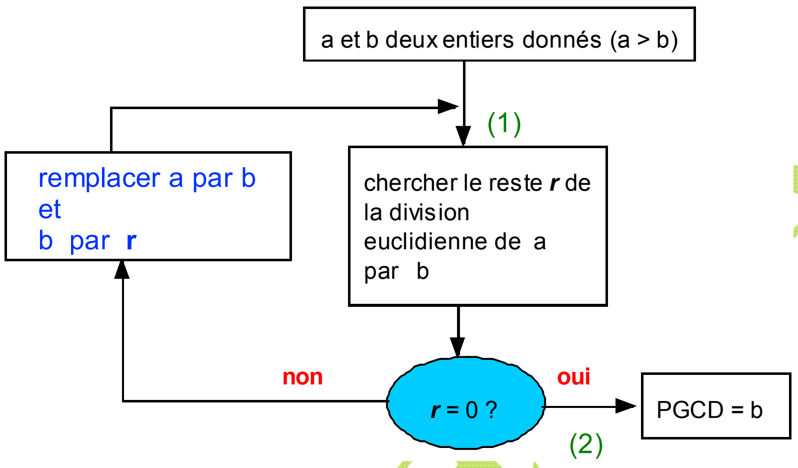
2. Poser les soustractions permettant de déterminer le PGCD de 494 et 143 :

Activité :	2.	*L'Algorithme d'Euclide*	.	نشاط:

Principe :

- on divise a par b ; on trouve le reste r ;

- si r = 0 , l'algorithme se termine :
PGCD(a ; b) = b
- si r ≠ 0, on remplace a par b et b par r ;
puis on recommence à partir de (1).



Exemple numérique : on veut calculer le PGCD de 1224 et 936 :

étapes	a	b	r
1	1224	936	288
2	936	288	72
3	288	72	0

$1224 = 1 \times 936 + 228$
$936 = 3 \times 288 + 72$
$288 = 4 \times 72 + 0$

L'algorithme s'arrête lorsque l'on trouve un reste nul.

Le **PGCD de a et b est le dernier reste non nul trouvé**.

PGCD(1224 ; 936) = PGCD(936 ; 288) = PGCD(288 ; 72) = 72.

Applications : (calculs au brouillon)

PGCD(9615 ; 5128)

étapes	a	b	r

PGCD(1515 ; 1789)

étapes	a	b	r

Conséquences : simplifier les fractions $\frac{9615}{5128}$ et $\frac{1515}{1789}$.

Que remarque-t-on ?

....
....

VII. *Nombres Premiers*		III. الأعداد الأولية :

1) أمثلة :

الأعداد مثل **2 ; 3 ; 5 ; 7 ; ......** لها بالضبط قاسمان أحدهما هو 1 والآخر هو العدد نفسه
وهذه أعداد أخرى لها نفس الخاصية : ....
العدد 1 ليس له قاسمان بالضبط ، هذا العدد له قاسم وحيد هو نفسه.

2) تعريف:

p عدد صحيح طبيعي .   **p** عدد أولي يعني أن **p** له قاسمان بالضبط .

Activités autour des Nombres Premiers		أنشطة حول الأعداد الأولية:

3) الأعداد الأولية الأصغر من 100:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

العدد 1 ليس أوليا لأن له قاسم وحيد وليس قاسمان بالضبط.
نحصل على الأعداد الأولية الأصغر من 100 (وعددها 25) بإزالة مضاعفات العدد 2 ثم 3 ثم 5 .... (الخانات الملونة)....
الأعداد الباقية هي الأعداد الأولية (الخانات البيضاء)

4) الأعداد الأولية الأصغر من 2000 هي :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199
211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293
307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397
401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499
503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599
601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691
701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797
809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887
907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

5) **ملاحظة:** مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية ، أكبر عدد أولي تم اكتشافه سنة 2008 هو العدد الأولي: $2^{43\,112\,609} - 1$.

Découvert en août 2008, le plus grand nombre premier connu est le nombre premier de Mersenne : « $2^{43\,112\,609} - 1$ », qui comporte près de 13 millions de chiffres en écriture décimale[mer 1].
(Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_premier)

6) ألتفكيك الى جداء أعداد أولية:

يمكن تفكيك أي عدد صحيح إلى جداء للأعداد أولية ، مثلا:

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7 \quad ; \quad 12 = 2^2 \times 3$$

خاصية عامة: كل عدد صحيح أكبر أو يساوي 2 يقبل قاسما أوليا واحدا على الأقل. نستنتج أن كل عدد صحيح أكبر أو يساوي 2 يفكك الى جداء لأعداد أولية.

7) حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر باستعمال التفكيك:

مثال:

لنبحث عن القاسم المشترك ألأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين **1764** و **120** بواسطة تفكيكهما الى جداء عوامل أولية

لدينا: $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$ و $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

الأعداد الأولية المشتركة في التفكيكين هي : **2** و **3**

القاسم المشترك للعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين الى جداء عوامل أولية، مرفوعة الى أصغر أس.

وبالتالي نجد : $120 \wedge 1764 = 2^2 \times 3^1 = 12$

المضاعف المشترك لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين الى جداء عوامل أولية، مرفوعة الى أكبر أس.

وبالتالي نجد : $120 \vee 1764 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = 17640$

خاصية عامة: • القاسم المشترك لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين الى جداء عوامل أولية، مرفوعة الى أصغر أس. • المضاعف المشترك لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين الى جداء عوامل أولية، مرفوعة الى أكبر أس.