I- الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\Re(O,\vec{i},\vec{j})$.

خاصية01:

إذا كانت (x,y) و (x',y') هما على التوالي زوجا إحداثيتي متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الأساس $B(\vec{i},\vec{j})$ ، فإن : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

1)- الصيغة المثلثية لمتجهة:

خاصية02:

إذا كانت $\vec{u}(x,y)$ متجهة غير منعدمة من V_2 و θ هو قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{i},\vec{u}})$ ، فإن : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\theta \\ y=\|\vec{u}\|\sin\theta \end{cases}$

إذن : $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})$

ملحوظة: إذا كانت $\vec{v}$ متجهة غير منعدمة من V_2 بحيث : $\begin{cases} \|\vec{v}\|=\|\vec{u}\| \\ \overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ، فإن $\vec{v}(-y,x)$.

2)- صيغة $\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ و $\sin\overline{(\vec{u},\vec{v})}$:

خاصية03: لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ من V_2 لدينا :

$$\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

و إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدتين ، فإن :

$$\tan\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\vec{u}.\vec{v}}=\frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{xx'+yy'}\ .$$

3)- متفاوتة كوشي شوارتز:

خاصية04: لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من V_2 لدينا :

$$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

ويكون التساوي إذا وفقط إذا إذا كانت $\vec{u}$ مستقيمية مع $\vec{v}$.

إستنتاج: $-\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$:

$$|xx'+yy'|\leq\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}\ .$$

-- **المتفاوتة المثلثية:** لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من V_2 لدينا : $\|\vec{u}\pm\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ ،

ويكون التساوي إذا وفقط إذا إذا كانت $\vec{u}$ مستقيمية مع $\vec{v}$.

■ **وبصفة عامة:**

$$\left|\|\vec{u}\|\pm\|\vec{v}\|\right|\leq\|\vec{u}\pm\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\ .$$

II- دراسة تحليلية للدائرة:

1)- معادلة ديكارتية لدائرة:

-- إذا كانت (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها r فمعادلة ديكارتية لها هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

-- إذا كانت (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ ، فمعادلة ديكارتية لها هي :

$$(x-x_A).(x-x_B)+(y-y_A).(y-y_B)=0$$

مركز (C) هي النقطة $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

و شعاعها $r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

-- من ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C تمر في المستوى (P) دائرة وحيدة (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، مركزها Ω هي نقطة تلاقي واسطات المثلث ABC ($\Omega A=\Omega B=\Omega C$) و شعاعها $r=\Omega A$.

-- **مثال:** بين أن $A(2,3)$ و $B(-2,-1)$ و $C(1,-1)$ نقط غير مستقيمية و حدد معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

2)- تمثيل بارامتري لدائرة:

خاصية05: النظمة $(1):\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$ تمثيل بارامتري للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r .

ملحوظة: للحصول على تمثيل بارامتري للدائرة (C) في النظمة (1) يكفي أن يتغير البارامتر θ على مجال سعته 2π فقط ، مثل $[-\pi,\pi[$ أو $[0,2\pi[$.

3)- دراسة المعادلة (E) حيث:

$$(E): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

خاصية06: تكون (E) معادلة لدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 - c \geq 0$ ، مركز (C) في هذه الحالة هو $\Omega(a,b)$ و شعاعها هو $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

4)- تجويه المستوى بدائرة:

خاصية07: إذا كانت (C) دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ، فإن داخل الدئرة (C) هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من (P) بحيث :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0$$

و خارجها مجموعة النقط $M(x,y)$ من (P) بحيث: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \succ 0$.

هذا يعني أن كل دائرة (C) تجزء المستوى (P) إلى ثلاثة أجزاء وهي $Int(C)$ و $Ext(C)$ و (C) .

5)- الأوضاع النسبية لدائرة و مستقيم:

خاصية08: لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و (D) مستقيما ، نضع $d = d(\Omega,(D))$.

هناك ثلاثة أوضاع ممكنة بالنسبة ل (D) و (C) و هي :

-- $d \succ r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \varnothing$ ، نقول إن (D) خارج الدائرة (C) .

-- $d = r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \{H\}$ ، نقول إن (D) مماس للدائرة (C) في النقطة H .

-- $d \prec r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \{A,B\}$ ، (D) في هذه الحالة يخترق (C) في نقطتين مختلفتين A و B .

6)- المماس لدائرة في إحدى نقطها:

-- إذا كانت (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة من (C) فالمماس (Δ) ل (C) في A يقبل $\overrightarrow{\Omega A}$ متجهة منظمية عليه ، إذن $(\Delta) = \{M \in (P) / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0\}$.

خاصية09: إذا كانت (C) دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ، فمعادلة ديكارتية للمماس (Δ) ل (C) في إحدى نقطها A هي :

$$x_A x + y_A y - a(x_A + x) - b(y_A + y) + c = 0$$

7)- الأوضاع النسبية لدائرتين:

لتكن (C) و (C') دائرتين مركزاهما Ω و Ω' بحيث $\Omega \neq \Omega'$ و شعاعاهما r و r' ، نضع : $d = \Omega\Omega'$

لدينا : $(C)\cap(C') \neq \varnothing \Leftrightarrow |r - r'| \leq d \leq r + r'$

و تتضمن هذه الحالة ثلاث و ضعيات ممكنة :

-- (C) و (C') يتقاطعان في نقطتين إذا وفقط إذا كان : $|r - r'| \prec d \prec r + r'$.

-- (C) و (C') متماستين خارجيا إذا وفقط إذا كان : $d = r + r'$.

-- (C) و (C') متماستين داخليا إذا وفقط إذا كان : $d = |r - r'|$.

-- وأخيرا لدينا :

$$(C)\cap(C') = \varnothing \Leftrightarrow d \prec |r - r'| \text{ أو } d \succ r + r'$$

$$d \succ r + r' \Leftrightarrow (C') \subset Ext(C)$$

و $d \prec r - r' \Leftrightarrow (C') \subset Int(C);(r' \prec r)$