## I- تحليلية الجداء السلمي:

المستوى المتجهي $V_2$ منسوب لأساس متعامد و ممنظم $B\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ و المستوى $(P)$ منسوب لمعلم متعامد و ممنظم $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

### 1)- الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

- **خاصية01:**

لكل متجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}\left(x',y'\right)$ من $V_2$ لدينا : $\vec{u}\vec{v}=xx'+yy'$

و بصفة خاصة : $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$ .

و لكل نقطتين $A$ و $B$ من $(P)$ لدينا : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$ .

### 2)- متفاوتة كوشي شوارز:

- **خاصية02:**

لكل متجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}\left(x',y'\right)$ من $V_2$ لدينا : $\left|\vec{u}\vec{v}\right|\le\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$

بمعنى أن : $\left|xx'+yy'\right|\le\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}$ .

و يتحقق التساوي $\left|\vec{u}\vec{v}\right|=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين .

- **المتفاوتة المثلثية:**

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $V_2$ لدينا : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\le\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ و $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|\le\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ .

ويكون $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و لهما نفس المنحى .

و $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و لهما منحى معاكس .

**وبصفة عامة:**

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $V_2$ لدينا : $\left|\left\|\vec{u}\right\|\pm\left\|\vec{v}\right\|\right|\le\left\|\vec{u}\pm\vec{v}\right\|\le\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ .

## II- الجداء السلمي و قياس الزوايا الموجهة:

فيما يلي المستوى المتجهي $V_2$ منسوب لأساس متعامد ممنظم و مباشر $B\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ و المستوى $(P)$ منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

### 1)- الصيغة المثلثية لمتجهة:

- **خاصية03:**

إذا كانت $\vec{u}(x,y)$ متجهة غير منعدمة و $\alpha$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{i},\vec{u}}\right)$ فإن :

بمعنى أن : $\begin{cases}x=\left\|\vec{u}\right\|\cos\alpha\\ y=\left\|\vec{u}\right\|\sin\alpha\end{cases}$ $\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|\left(\cos\alpha.\vec{i}+\sin\alpha.\vec{j}\right)$ .

- **ملحوظة:**

إذا كانت $\vec{v}$ متجهة غير منعدمة من $V_2$ بحيث : $\left\|\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|$ و $\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

فإن : $\vec{v}(-y,x)$ ، حيث $\vec{u}(x,y)$ .

### 2)- صيغة $\cos\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)$ :

- **خاصية04:**

لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}\left(x',y'\right)$ من $V_2$ لدينا :

$$\cos\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

و

$$\sin\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$ .

و إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدتين فإن : $\tan\left(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{\vec{u}\vec{v}}=\frac{xy'-x'y}{xx'+yy'}$ .

### 3)- مساحة مثلث:

- **خاصية05:** إذا كانت $A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط غير مستقيمية من المستوى $(P)$

فإن مساحة المثلث $ABC$ هي : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$ .

و مساحة متوازي أضلاع المحدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي : $\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$ .

## III- المستقيم المعرف بنقطة و متجهة منظمية عليه:

المستوى التآلفي $(\mathrm{P})$ منسوب لمعلم متعامد و ممنظم $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

### 1)- متجهة منظمية على مستقيم:

- **تعريف:**

ليكن $(D)$ مستقيما و $\vec{u}$ متجهة موجهة له .

كل متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ متعامدة مع المتجهة $\vec{u}$ تسمى متجهة منظمية على المستقيم $(D)$ .

- **خاصية06:**

إذا كان $(D)$ مستقيما معادلته $ax+by+c=0$ فإن $\vec{n}(a,b)$ متجهة منظمية عليه .

### 2)- معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمية عليه:

- **خاصية07:**

إذا كان $(D)$ مستقيما مارا من نقطة معلومة $A\left(x_A,y_A\right)$ و $\vec{n}(a,b)$ متجهة منظمية عليه فمعادلة ديكارتيه له هي : $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$ .

- **خاصية08:**

نعتبر المستقيمين : $(D):ax+by+c=0$ و $\left(D'\right):a'x+b'y+c'=0$

لدينا : $(D)\perp\left(D'\right)\Leftrightarrow\vec{n}(a,b)\perp\vec{n'}\left(a',b'\right)\Leftrightarrow aa'+bb'=0$ .

بصفة خاصة إذا كان : $(D):y=mx+p$ و $\left(D'\right):y=m'x+p'$ فإن :

$(D)\perp\left(D'\right)\Leftrightarrow m\times m'=-1$ .

### 3)- مسافة نقطة عن مستقيم:

- **خاصية09:**

مسافة النقطة $A\left(x_A,y_A\right)$ عن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $ax+by+c=0$ هي :

$$d\left(A,(D)\right)=\frac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ .

## IV- دراسة تحليلية للدائرة:

### 1)- معادلة ديكارتية لدائرة:

- **خاصية10:**

معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها $r$ هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$ .

- **ملحوظة:**

يمكن كتابة المعادلة السابقة على شكل : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

حيث $c=a^2+b^2-r^2$ ، و إشارة العدد $c$ تحدد الوضع النسبي لأصل المعلم $O$ بالنسبة للدائرة $(C)$ .

$c=0\Leftrightarrow O\in(C)$ و $c<0\Leftrightarrow O\in Int(C)$ و $c>0\Leftrightarrow O\in Ext(C)$ .

- **خاصية11:**

الدائرة $(C)$ التي أحد أقطارها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M$ من المستوى $(\mathrm{P})$ بحيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، و معادلة ديكارتية لها هي :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$ .

- **ملحوظة:**

مركز الدائرة $(C)$ التي أحد أقطارها $[AB]$ هو $\Omega$ منتصف القطعة $[AB]$ و شعاعها $r=\frac{AB}{2}$ ، إذن فمعادلة ديكارتية لها هي أيضا :

$$\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2\right)$$ .

- **خاصية12:**

من ثلاث نقط غير مستقيمية $A$ و $B$ و $C$ تمر دائرة وحيدة $(C)$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ : مركزها $\Omega$ نقطة تلاقي واسطات المثلث $ABC$ $(\Omega A=\Omega B=\Omega C)$ و شعاعها المسافة $r=\Omega A$ .

### 2)- تمثيل بارامتري لدائرة:

المستوى التآلفي $(\mathrm{P})$ المنسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها $r$ .

لكل نقطة $M(x,y)$ من $(\mathrm{P})$ لدينا : $\overrightarrow{\Omega M} = \Omega M\left(\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}\right)$

حيث $\theta$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M}\right)$ .

إذن : $M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = r\left(\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

- **خاصية13:**

النظمة $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ لما يتغير البارامتر $\theta$ على $\mathbb{R}$ ( أو على مجال سعته $2\pi$ )

تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها $r$ .

**3)- دراسة المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ :**

- **خاصية14:**

تكون $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ معادلة لدائرة $(C)$ إذا و فقط إذا كان :

$a^2+b^2-c\geq 0$ .

مركز $(C)$ في هذه الحالة هو $\Omega(a,b)$ و شعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ .

**4)- تجويه المستوى بدائرة:**

كل دائرة $(C)$ ( مركزها $\Omega$ و شعاعها $r$ ) تجزء المستوى $(\mathrm{P})$ إلى ثلاثة أجزاء :

الدائرة $(C)$ و داخل $(C)$ : $Int(C)=\{M\in(\mathrm{P})/\Omega\mathrm{M}<r\}$

و خارجها : $Ext(C)=\{M\in(\mathrm{P})/\Omega\mathrm{M}>r\}$ .

- **خاصية15:**

إذا كانت $(C)$ دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ فإن :

$M(x,y)\in Int(C) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c<0$

و $M(x,y)\in Ext(C) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c>0$ .

**5)- الأوضاع النسبية لدائرة و مستقيم:**

- **خاصية16:**

نعتبر في المستوى $(\mathrm{P})$ مستقيما $(D)$ و دائرة $(C)$ مركزها $\Omega$ و شعاعها $r$

و نضع : $d=d(\Omega,(D))$ .

إذا كان $d>r$ فإن : $(D)\cap(C)=\varnothing$ ، نقول إن $(D)$ خارج الدائرة $(C)$ .

إذا كان $d=r$ فإن : $(D)\cap(C)=\{H\}$ ، نقول إن $(D)$ مماس للدائرة $(C)$ في النقطة $H$ .

إذا كان $d<r$ فإن : $(D)\cap(C)=\{A,B\}$ ، المستقيم $(D)$ في هذه الحالة يقطع الدائرة $(C)$ في نقطتين مختلفتين $A$ و $B$ ( متقابلتين قطريا في حالة $d=0$ ) .

**6)- المماس لدائرة في إحدى نقطها:**

- **تعريف:**

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $\Omega$ و شعاعها $r$ و $A$ نقطة من $(C)$ .

المماس $(\Delta)$ للدائرة $(C)$ في النقطة $A$ هو المستقيم المار من $A$ و $\overrightarrow{A\Omega}$ متجهة منظمية عليه ، إذن : $(\Delta)=\left\{M\in(\mathrm{P})/\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0\right\}$ .

- **خاصية17:**

إذا كانت $(C)$ دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ و $A(x_0,y_0)$ نقطة من $(C)$ فمعادلة المماس $(\Delta)$ للدائرة $(C)$ عند النقطة $A$ هي :

$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0$ .

Prof : BEN ELKHATIR