

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

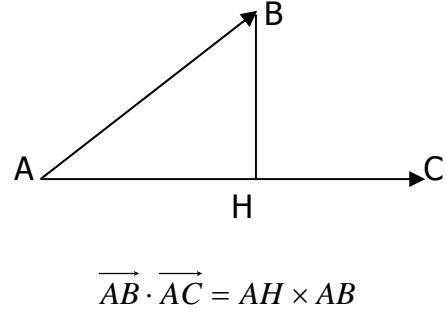
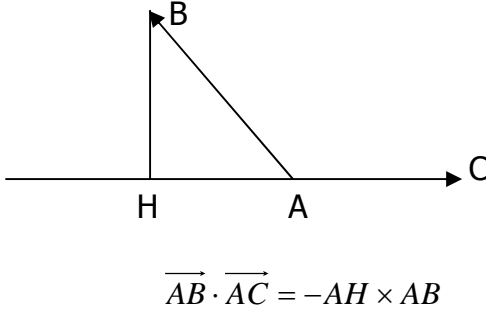
I - الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

1) تذكير وإضافات :

أ - تعريف الجداء السلمي لمتجهتين :

صيغة الجداء السلمي باستعمال الإسقاط العمودي :

- لتكن A و B و C ثلاث نقط في المستوى و H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) .
- الجداء السلمي للمتجهتين \vec{AB} و \vec{AC} هو العدد الحقيقي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ والذي يحقق :
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH \times AC$ إذا كانت المتجهتين \vec{AH} و \vec{AC} لهما نفس المنحى .
 - $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AH \times AC$ إذا كانت المتجهتين \vec{AH} و \vec{AC} لهما المنحيان متعاكسان .



الصيغة المثلثة للجداء السلمي :

- لتكن \vec{AB} و \vec{AC} متجهتين في المستوى لدينا : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC})$
- لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين في المستوى لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

ب - المعلم المتعامد الممنظم المباشر - الأساس المتعامد الممنظم المباشر :

تعريف :

1. نقول إن متجهتين \vec{i} و \vec{j} تكونان أساسا في المستوى إذا كانت \vec{i} و \vec{j} غير مستقيمتين . ونكتب $(\vec{i}; \vec{j})$ أساس في المستوى . والمستوى مزود بأساس $(\vec{i}; \vec{j})$.
نعتبر $(\vec{i}; \vec{j})$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى .
2. نقول إن $(\vec{i}; \vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ و $\|\vec{i}\| = 1$ و $\|\vec{j}\| = 1$.
3. نقول إن المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i}; \vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما .
4. إذا كان $(\vec{i}; \vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ فإننا نقول إن $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

ملاحظة : في كل هذا الدرس نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر .

2) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

نشاط تمهيدى :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين في المستوى بحيث : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

(1) انشر ثم بسط ما يلي : $(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$ واستنتج : $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(2) بين أن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

خاصة 1 :

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متجهتين في المستوى فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

أمثلة : نعتبر المتجهات : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

حساب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\vec{u} \cdot \vec{w}$ و $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

خاصة 2 :

تكون المتجهتان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $xx' + yy' = 0$.

3) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

أ - منظم متجهة :

لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ متجهة في المستوى لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

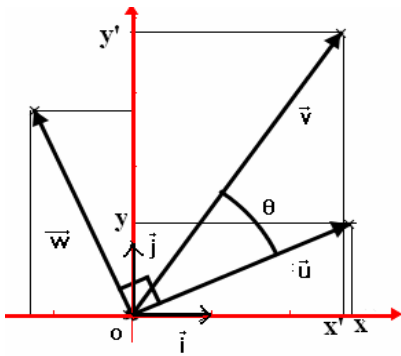
ب - المسافة بين نقطتين :

لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتين في المستوى ، لدينا : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4) صيغة $\cos\theta$ و $\sin\theta$:

نشاط تمهيدى :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين في المستوى بحيث : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ و θ قياس الزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$



1) احسب بطريقتين مختلفتين الجداء السلمي احسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2) استنتج $\cos\theta$ بدلالة x و y و x' و y' .

3) نعتبر المتجهة \vec{w} بحيث : $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$ و $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$.

أ - بين أن : $(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

ب - احسب الجداء السلمي $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ثم استنتج أن : $\sin\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

ج - تحقق أن $\vec{w}(-y; x)$ ثم احسب $\sin\theta$ بدلالة x و y و x' و y' .

د - تحقق أن : $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

خاصة :

لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة

$(\vec{u}; \vec{v})$. لدينا : $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$ و $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

تمارين تطبيقية :

1) حدد قيمة العدد الحقيقي m بحيث تكون المتجهتان $\vec{u}(2; m)$ و $\vec{v}(3; -2)$ متعامدتين.

2) نعتبر المتجهة $\vec{u}(2; -3)$ حدد المتجهات $\vec{v}(x; y)$ بحيث يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ و $\|\vec{v}\| = 2$.

3) نعتبر النقط $A(-3; -1)$ و $B(1; 1)$ و $C(-5; 3)$. بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

4) نعتبر النقط $A(5; 0)$ و $B(2; 1)$ و $C(6; 3)$.

أ - احسب $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ و $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

ب - استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

5) نتائج :

نشاط تمهيدى :

ليكن ABC مثلثا في المستوى و H المسقط العمودي ل C على (AB) .

1) حدد $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ واحسب $\sin \hat{A}$ (حيث \hat{A} زاوية هندسية)

2) احسب المساحة S للمثلث ABC بدلالة AB و AC و $\sin \hat{A}$.

3) استنتج أن : $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$.

4) نعتبر النقطة D بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع محدد بالمتجهتين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} .

احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$.

اليمني محمد www.sbaysite.com

خاصة 1 :

ليكن ABC مثلثا في المستوى و S مساحته ، لدينا :

$$S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})| = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})|$$

خاصة 2 :

مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ المحدد بالمتجهين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} هي : $S_{ABDC} = |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$

تمارين تطبيقية :

- 1) نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$.
 أ - تحقق أن النقط A و B و C غير مستقيمة .
 ب - احسب مساحة المثلث ABC .
 ج - نعتبر النقطة D بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع . حدد زوج إحداثياتي النقطة D ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$.
 2) نعتبر النقط $A(0;6)$ و $B(-2;0)$ و $C(2;1)$.
 احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين .

II - المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية) :

1) المتجهة المنظمة على مستقيم :

نشاط تمهيدى :

- 1) نعتبر المستقيم (D) ذي المعادلة : $x + 2y + 1 = 0$.
 أ - حدد متجهة موجهة \vec{u} للمستقيم (D) .
 ب - نعتبر المتجهة $\vec{n}(1;2)$ احسب الجداء السلمي $\vec{n} \cdot \vec{u}$. ماذا تستنتج ؟
 المتجهة \vec{n} تسمى متجهة منظمة على المستقيم (D) .
 2) نعتبر المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $ax + by + c = 0$.
 أ - بين أن المتجهة $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة على المستقيم (Δ) .
 ب - تطبيق : حدد متجهة منظمة على المستقيم (D) ذو المعادلة : $x - y + 2 = 0$.

تعريف :

ليكن (D) مستقيما في المستوى و \vec{u} متجهة موجهة له .
 نقول إن متجهة غير منعدمة \vec{n} منظمة على المستقيم (D) إذا كانت تحقق : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

خاصة :

ليكن (D) مستقيما في المستوى معادلته $ax + by + c = 0$.
 المتجهة $\vec{n}(a;b)$ منظمة على المستقيم (D)

2) المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمة عليه :

نشاط تمهيدى :

- نعتبر $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A; y_A)$ نقطة من المستوى .
 حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(x_A; y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه .

خاصة

معادلة المستقيم (D) المار من $A(x_A; y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه هي :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

تمارين تطبيقية :

- 1) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(1;1)$ و $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمة عليه .
2) ليكن ABC مثلثا في المستوى بحيث $A(3;1)$ و $B(-1;5)$ و $C(-2;2)$.
أ - حدد معادلة ديكارتية لارتفاع المثلث المار من الرأس C .
ب - حدد معادلة ديكارتية لوسط القطعة $[AB]$.

3) تعامد مستقيمين :

نعتبر مستقيمين (D) و (D') معادلتها على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة على (D) و $\vec{n}'(a';b')$ متجهة منظمة على (D') .
يكون (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{n}(a;b)$ و $\vec{n}'(a';b')$ متعامدين أي : $aa'+bb'=0$

خاصة :

يكون المستقيمان (D) و (D') اللذان معادلتها $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على التوالي متعامدين إذا وفقط إذا كان : $aa'+bb'=0$.

تمرين تطبيقي :

- لتكن النقط $A(7;4)$ و $B(5;-2)$ و $C(2;1)$ من المستوى .
1) تحقق أن $3x - y - 17 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)
2) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من C

4) مسافة نقطة عن مستقيم :

تعريف :

نعتبر مستقيما (D) و A نقطة لا تنتمي إلى (D) و H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .
المسافة AH تسمى المسافة بين A و (D) ونرمز لها بالرمز : $d(A;(D))$ ونكتب : $d(A;(D)) = AH$

نشاط تمهيدى :

- نعتبر مستقيما (D) معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة لا تنتمي إلى (D) .
نعتبر H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .
1) لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة على المستقيم (D) و B النقطة من المستوى بحيث : $\vec{AB} = \vec{n}$.
بين أن لكل نقطة M من (D) لدينا : $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$
2) احسب $\vec{AM} \cdot \vec{AB}$ بدلالة x و y و x_A و y_A و a و b .
3) بين أن $AH \cdot AB = |ax_A + by_A + c|$
4) استنتج أن : $d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

خاصة :

ليكن (D) مستقيما معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .
مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمارين تطبيقية :

- 1) نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $x+y+2=0$ والنقطتين $A(1;-1)$ و $B(0;-2)$.
احسب $d(A;(D))$ و $d(B;(D))$.
2) نعتبر النقطتين $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$.
أ - تحقق أن $5x - 4y - 7 = 0$ هي معادلة المستقيم (AB) .
ب - احسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB) .

III - الدائرة (دراسة تحليلية) :

1 (معادلة ديكارتية لدائرة :

نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

1 (من بين النقط التالية حدد تلك التي تنتمي إلى الدائرة (C) : $A(3;1)$; $B(2;2)$; $C(\sqrt{3}+1;2)$; $D(-1;-1)$.

2 (لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى .

أ - احسب المسافة ΩM بدلالة x و y .

ب - بين أن M تنتمي إلى الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

المعادلة : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ تسمى معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

3 (بإتباع نفس خطوات السؤال السابق حدد معادلة ديكارتية لدائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R ($R > 0$) .

خاصة :

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R ($R > 0$) هي : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

وتكتب أيضا : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ حيث : $c = a^2 + b^2 - R^2$.

تمارين تطبيقية :

1 (حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-1)$ وشعاعها $\sqrt{2}$.

2 (حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وتتمر من النقطة $A(-1;1)$.

3 (حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي تمر من النقط $A(-1;0)$ و $B(1;2)$ و $C(7;4)$.

2 (معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها :

نشاط تمهيدى :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها R و $[AB]$ أحد أقطارها . ولتكن M نقطة من المستوى .

1 (بين أن : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$.

2 (استنتج أن (C) هي مجموعة النقط M التي تحقق : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3 (نعتبر $A(2;3)$ و $B(-4;5)$ و $M(x;y)$ نقطة من (C) . حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) .

خاصة :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى .

مجموعة النقط لنقط M من المستوى التي تحقق : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ ؛

ومعادلتها هي : $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$.

تمرين تطبيقي :

حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث : $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

3 (تمثيل براميتري لدائرة :

نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و

M نقطة من (C) حيث : $(\vec{i}; \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta [2\pi]$ ($\theta \in \mathbb{R}$) .

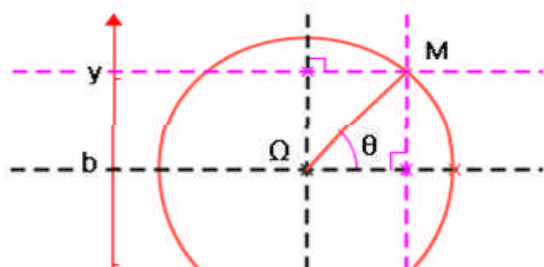
1 (أ - بين أن : $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \cos \theta$.

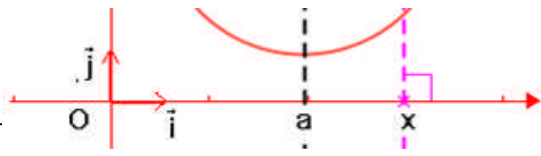
ب - بين أن : $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \sin \theta$.

2 (ليكن $(x;y)$ زوج إحداثيتي النقطة M .

أ - حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$.

ب - احسب $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ و $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ بدلالة x و y و a و b





ج - استنتج أن : $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

النظمة $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ تسمى تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a; b)$ وشعاعها R .

خاصة وتعريف :

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a; b)$ وشعاعها R ($R > 0$) هي مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى التي تحقق : $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$. النظمة (S) تسمى تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) .

تمارين تطبيقية :

- حدد تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية : $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$
- حدد مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى التي تحقق : $\begin{cases} x = -1 + 2 \cos \theta \\ y = 3 + 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

4 (دراسة مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. حدد طبيعة (Γ) .

لدينا : $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

نعتبر النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$. لدينا : $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

• إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} < 0$ فإن المتساوية $\Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ غير صحيحة وفي هذه الحالة : $(\Gamma) = \Phi$

• إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0$ فإن $\Omega M^2 = 0$ أي $\Omega = M$ ومنه فإن : $(\Gamma) = \{\Omega\}$

• إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$ فإن $\Omega M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ $\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ وفي هذه الحالة :

(Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

خاصة :

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و (Γ) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

• تكون (Γ) دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ومركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ وشعاعها

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

• إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c < 0$ فإن $(\Gamma) = \Phi$.

- إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c = 0$ فإن $(\Gamma) = \{\Omega\}$ ؛ حيث : $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

تمرين تطبيقي :

حدد طبيعة المجموعة (C) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق المعادلات التالية :

1 ($x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$) .

2 ($x^2 + y^2 - x - 10y + 25 = 0$) .

3 ($x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{17}{4} = 0$) .

5 داخل وخارج الدائرة :

تعريف :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها $R (R > 0)$ و M نقطة من المستوى .

- تكون M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M = R$.
- تكون M نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M < R$.
- تكون M نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M > R$.

نتيجة :

لتكن (C) دائرة معادلتها الديكارتية : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و $M(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى .

- تكون M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.
- تكون M نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$.
- تكون M نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$.

تمرين تطبيقي :

1 (لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-1; 2)$ وشعاعها $R = 3$. حدد وضع النقطتين $A(3; -1)$ و $B(0; 1)$ بالنسبة للدائرة (C) .

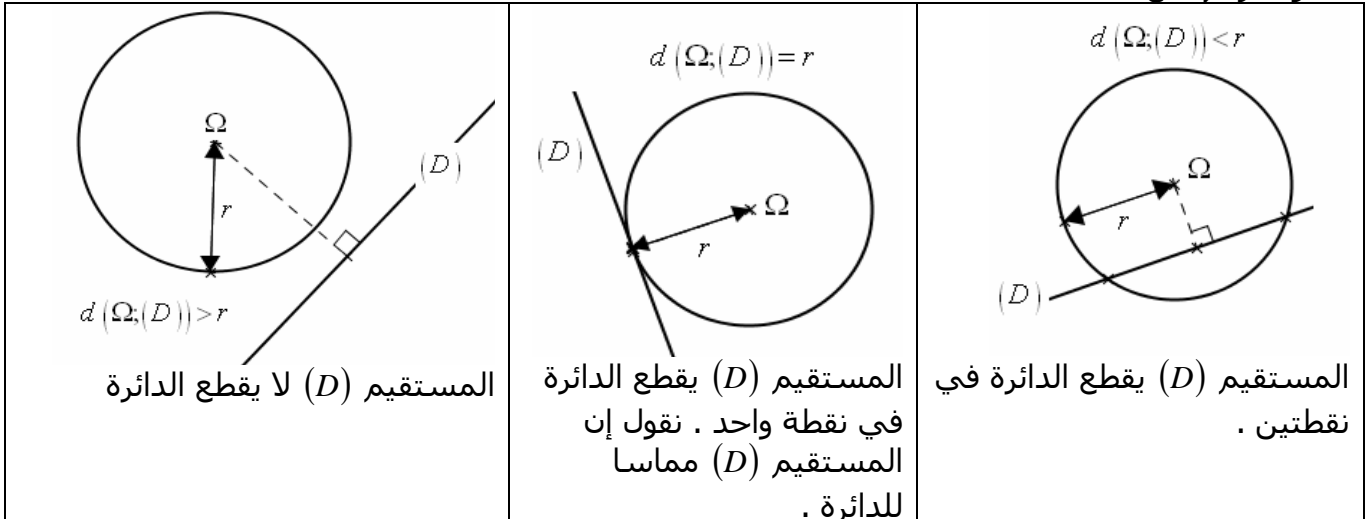
2 (حل مبيانيا المتراجحات التالية :

أ - $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 \geq 0$.

ب - $x^2 + y^2 - 6x < 0$.

6 (الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم :

لدراسة الوضع النسبي لدائرة (C) مركزها Ω وشعاعها r مع مستقيم (D) ؛ يمكن حساب مسافة (D) عن Ω ومقارنتها مع r .



تمرين تطبيقي :

ادرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية : 1) $(D) : x+y+3=0$ ؛ 2) $(D) : x-y+3+2\sqrt{2}=0$ ؛ 3) $(D) : 2x+y+1=0$.

7) معادلة المماس لدائرة في نقطة :

نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) . وليكن (T) المستقيم المماس للدائرة (C) في A .

1) حدد متجهة منظمية على (T) .

2) بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (T) هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$.

الجواب :

1) يكون المستقيم (T) مماسا للدائرة (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على المستقيم $(A\Omega)$. إذن المتجهة $\overline{A\Omega}$ منظمية على المستقيم (T) .

2) تحديد معادلة ديكارتية ل (T) :

$$M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$$

خاصة 1 :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) . معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$.

ملاحظة :

إذا كانت الدائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ فإن مركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ في هذه

الحالة معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$.

خاصة 2 :

نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) .

$$\text{معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : } (x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$$

تمارين تطبيقية :

1) نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-1;-2)$ وشعاعها $R=2$.

أ - تحقق أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب - حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .

2) نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$.

أ - تحقق أن النقطة $A(1;2)$ تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب - حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته (تمارين)

التمرين 1 :

- نعتبر النقط $A(0;6)$ و $B(-2;0)$ و $C(2;1)$.
 1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمة .
 2) احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين .

التمرين 2 :

- نعتبر النقط $A(-1;-3)$ و $B(2;1)$ و $C(6;-2)$.
 1) احسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ واستنتج قيمة $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$
 2) احسب BC واستنتج طبيعة المثلث ABC .
 3) احسب مسافة B عن المستقيم (AC) .
 4) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم المار من A و $\vec{u}(-1;2)$ متجهة منظمية عليه .

التمرين 3 :

- نعتبر النقط $A(0;1)$ و $B(0;-1)$ و $C(-1;1)$.
 1) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ_A) ارتفاع المثلث المار من الرأس A .
 2) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$.
 3) أعط تمثيلا باراميتريا للمستقيم (D) المار من C والموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;1)$.
 4) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متعامدان وحدد نقطة تقاطعهما .

التمرين 4 :

- نعتبر النقط $A(1;2)$ و $B(4;3)$ و $C(2;-1)$.
 1) بين أن $(AB) \perp (AC)$.
 2) احسب مسافة A عن المستقيم (OB) .

التمرين 5 :

- 1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها $R = 2\sqrt{2}$
 2) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;-3)$ وتمر من النقطة $A(4;-6)$.
 3) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث : $A(-2;1)$ و $B(4;-1)$.
 4) أعط تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) التي مركزها Ω وشعاعها R في الحالتين :
 أ - $R = 2$ و $\Omega(2;-1)$ ؛ ب - $R = \sqrt{3}$ و $\Omega(0;-2)$

التمرين 6 :

- لتكن (C) مجموعة النقط $M(x; y)$ بحيث : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
 1) بين أن (C) دائرة وحدد مركزها وشعاعها .
 2) تحقق أن النقطة $A(-1;-1)$ تنتمي إلى الدائرة (C) ، وحدد معادلة ديكارتية لمماس (C) في A .
 3) ادرس وضع النقطتين $B(3;1)$ و $C(-2; \frac{1}{2})$ بالنسبة للدائرة (C) .
 4) حدد معادلتى المماس للدائرة (C) المارين من النقطة $B(3;1)$.

التمرين 7 :

- لتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x; y)$ بحيث : $x^2 + y^2 - 2x + \sqrt{2}y + m = 0$ ؛ $(m \in \mathbb{R})$.
 1) ناقش حسب قيم البارامتر m طبيعة المجموعة (C_m) .
 2) نفترض أن $m < \frac{3}{2}$.
 أ - حدد مركز وشعاع الدائرة (C_m) .

ب - حدد قيمة العدد m بحيث يكون المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مماسا للدائرة (C_m) .

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته (تمارين)

التمرين 1 :

- نعتبر النقط $A(-1;-3)$ و $B(2;1)$ و $C(6;-2)$.
1) احسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ واستنتج قيمة $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$
2) احسب BC واستنتج طبيعة المثلث ABC .
3) احسب مسافة B عن المستقيم (AC) .
4) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم المار من A و $\vec{u}(-1;2)$ متجهة منظمية عليه .

التمرين 2 :

- نعتبر النقط $A(0;1)$ و $B(0;-1)$ و $C(-1;1)$.
1) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ_A) ارتفاع المثلث المار من الرأس A .
2) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$.
3) أعط تمثيلا براميتريا للمستقيم (D) المار من C والموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;1)$.
4) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متعامدان وحدد نقطة تقاطعهما .

التمرين 3 :

- 1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها $R = 2\sqrt{2}$
2) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;-3)$ وتمر من النقطة $A(4;-6)$.
3) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث : $A(-2;1)$ و $B(4;-1)$.
4) أعط تمثيلا براميتريا للدائرة (C) التي مركزها Ω وشعاعها R في الحالتين :
أ - $\Omega(2;-1)$ و $R = 2$ ؛ ب - $\Omega(0;-2)$ و $R = \sqrt{3}$

التمرين 4 :

- نعتبر النقط $A(5;3)$ و $B(4;-2)$ و $C(0;4)$.
1) بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .
2) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .
3) حدد مركز وشعاع الدائرة (C) .
4) حدد معادلة المستقيم المماس للدائرة (C) في A .
5) احسب مسافة A عن المستقيم (OB) .

التمرين 5 :

- لتكن (C) مجموعة النقط $M(x; y)$ بحيث : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
1) بين أن (C) دائرة وحدد مركزها وشعاعها .
2) تحقق أن النقطة $A(-1;-1)$ تنتمي إلى الدائرة (C) ، وحدد معادلة ديكارتية لمماس (C) في A .
3) ادرس وضع النقطتين $B(3;1)$ و $C(-2; \frac{1}{2})$ بالنسبة للدائرة (C) .

التمرين 6 :

- لتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x; y)$ بحيث : $x^2 + y^2 - 2x + \sqrt{2}y + m = 0$ ؛ $(m \in \mathbb{R})$.
1) ناقش حسب قيم البراميتز m طبيعة المجموعة (C_m) .
2) نفترض أن $m < \frac{3}{2}$.
أ - حدد مركز وشعاع الدائرة (C_m) .
ب - حدد قيمة العدد m بحيث يكون المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مماسا للدائرة (C_m) .