

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- تذكير

تعريف

تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث
 $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)
 الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}'$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$ حيث α قياس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$.

ملاحظة

*- إذا كانت \vec{u} أو \vec{v} منعدمة فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
 *- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير منعدمتين فإن $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

خاصيات

مهما كانت المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} و العدد الحقيقي α
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
 $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

تعامد متجهتين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x; y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم

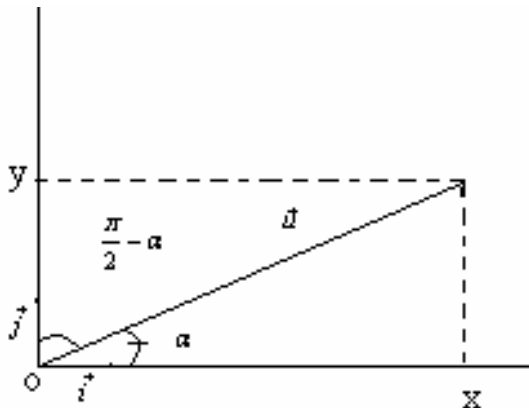
$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y$$

أمثلة أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في الحالات.....

2- إحداثيات متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x; y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم

مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و α قياس $(\vec{i}; \vec{u})$



$$y = \vec{u} \cdot \vec{j} \quad ; \quad x = \vec{u} \cdot \vec{i} \quad \text{لدينا}$$

$$y = \|\vec{u}\| \|\vec{j}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad x = \|\vec{u}\| \|\vec{i}\| \cos \alpha \quad \text{ومنه}$$

$$y = \|\vec{u}\| \sin \alpha \quad x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \quad \text{إذن}$$

خاصية

إذا كان $(x; y)$ زوج إحداثياتي متجهة غير منعدمة \vec{u} بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j})$ و α

قياس

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \quad \text{فان } (\widehat{\vec{i}; \vec{u}})$$

حالة خاصة

إذا كانت \vec{u} متجهة واحدة (أي $\|\vec{u}\| = 1$) فان $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x; y)$ زوج إحداثياتي \vec{u} بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i}; \vec{j})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

* إذا كان $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ فان

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

\vec{u} و \vec{v} متجهتان حيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

تمرين

حدد المتجهات الواحدة و المتعامدة مع $\vec{u}(-1; 2)$

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \dots\dots\dots$$

تمرين نعتبر $A(1; 3)$ $B(3; 1)$ $C(-3; -1)$

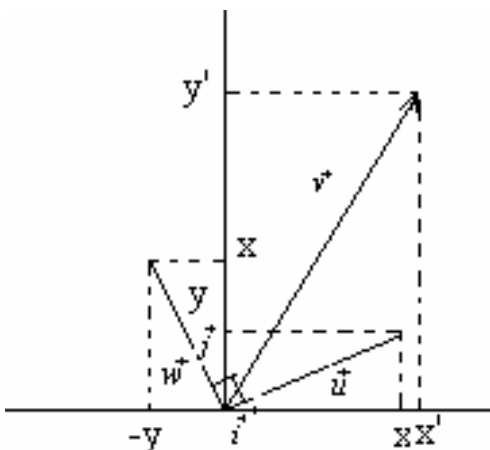
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\sin \theta$ و $\cos \theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ و θ قياس $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ فان $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$

* نعتبر المتجهة \vec{w} بحيث $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $(\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w}) - (\vec{u}; \vec{v})$

$$\overline{(\vec{v}; \vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \text{نعلم أن}$$

$$\sin \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u}; \vec{v}) \quad \text{لدينا}$$

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{إذن}$$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ حيث $\vec{u}(-\sqrt{3}; -3)$ و $\vec{v}(-1; \sqrt{3})$. حدد θ .

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

- * إذا كانت \vec{n} منظمية على (D) فإن كل متجهة $k\vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}^*$) منظمية عليه.
- * إذا كانت \vec{n} و \vec{n}' متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فإنهما تكونان مستقيمتين.
- * إذا كانت $\vec{u}(a; b)$ موجهة ل (D) فإن المتجهة $\vec{n}(-b; a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a; b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$$\overline{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{مستقيمتان}$$

$M \Leftrightarrow$ تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b; a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b; a)$

معادلته ستكون على شكل $ax + by + c = 0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a; b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b; a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a; b)$ منظمية على (D) فإن معادلة (D) على شكل $ax + by + c = 0$

إذا كان $ax + by + c = 0$ (D): فإن $\vec{n}(a; b)$ منظمية على (D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$$(D_1): 3x - 2y + 1 = 0 \quad ; \quad (D_2): 2y - 1 = 0$$

$$(D_3): x - 3 = 0$$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1; 3)$ و $\vec{n}(4; 3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2; 1)$ و $B(0; 1)$ و $C(-2; 3)$ و $\vec{u}(-2; 5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و \vec{u} منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$$(a;b) \neq (0;0) ; (a';b') \neq (0;0) \text{ حيث } (D): ax + by + c = 0 \quad (D'): a'x + b'y + c' = 0$$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

نتيجة

$$(D): y = mx + p \quad (D'): y = m'x + p'$$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (D) المستقيم المار من $B(x_B; y_B)$ و $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه. لتكن نقطة $A(x_0; y_0)$ من المستوى H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

أ- أحسب $\vec{n} \cdot \overline{BA}$ بدلالة \vec{n} و \overline{HA}

$$HA = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{BA}|}{\|\vec{n}\|}$$

د- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$

$$HA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$ و $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ هي مسافة النقطة } A \text{ عن المستقيم } (D)$$

تمرين

$$A(-2; 3) ; (D): 3x - 4y + 1 = 0$$

$$d(A; (D))$$

تمرين

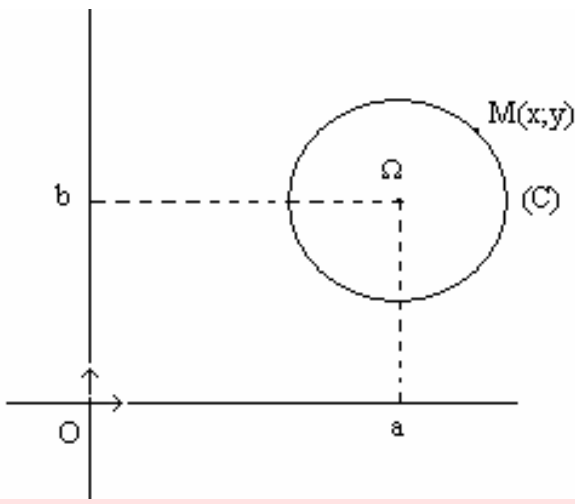
أحسب إحداثي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3; 5)$

$$(D): x - 2y + 8 = 0$$

دراسة تحليلية لدائرة

I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارته لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها



في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،
نعتبر (C) دائرة مركزها Ω(a;b) و شعاعها r (r ≥ 0)

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω(a;b) و شعاعها r (r ≥ 0) هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2 + y^2 = r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها Ω(-2;3) و شعاعها 4

2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها A(2;3) و تمر من النقطة B(1;-3)

ملاحظة

* بوضع $c = a^2 + b^2 - r^2$

معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω(a;b) و شعاعها r تكتب على شكل $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

* نعتبر {Ω} دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

لتكن (E) مجموعة النقط M(x;y) التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

إذا كان $a^2 + b^2 - c < 0$ فان $(E) = \emptyset$

إذا كان $a^2 + b^2 - c = 0$ فان $(E) = \{\Omega(a;b)\}$

إذا كان $a^2 + b^2 - c > 0$ فان $(E) = C(\Omega(a;b); r)$ حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 - c \geq 0$

مركز هذه الدائرة هو Ω(a;b) و شعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

تمرين

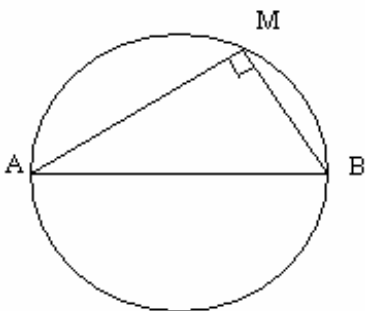
حدد (E) مجموعة النقط M(x;y) حيث $x^2 + y^2 - 2x + y + 7 = 0$

حدد (E') مجموعة النقط M(x;y) حيث $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$

3- معادلة معرف بأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها [AB] حيث A(x_A; y_A)

و B(x_B; y_B)



$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين
مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$
في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمة

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4- تمثيل بارامترى لدائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x - a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{r}\right)^2 = 1$$

ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0; 2\pi]$ حيث

$$\begin{cases} \frac{x - a}{r} = \cos \theta \\ \frac{y - b}{r} = \sin \theta \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r ($r > 0$) هي مجموعة النقط $M(x; y)$ التي

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ تحقق}$$

النظمة $\theta \in \mathbb{R}$ تسمى تمثيلا بارامترى لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

حالة خاصة

التمثيل البارامترى للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

تمرين

حدد تمثيلا بارامترى للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

نعتبر $c = a^2 + b^2 - r^2$

$$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x; y) \in (C)$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Omega M < r \Leftrightarrow (C) \text{ داخل } M$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0 \Leftrightarrow$$

خاصة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر (C) دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$

- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$

تمرين

حل مبيانيا

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 < 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1) \leq 0$$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r

* إذا كان $d(\Omega; (D)) > r$ فإن $(D) \cap (C) = \emptyset$

* إذا كان $d(\Omega; (D)) = r$ فإن $(D) \cap (C)$ أحادية

* إذا كان $d(\Omega; (D)) < r$ فإن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

$$1- (C) = C(\Omega(1; -2); 2) \text{ و } (D): x + 2y - 1 = 0$$

$$2- (C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \text{ و } (D): 3x + 4y - 6 = 0$$

$$3- (C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \text{ و } (D): 3x + 4y - 5 = 0$$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega; (D)) = r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فإنه لا يوجد أي مماس لها من A

إذا كان $A \in (C)$ فإنه يوجد مماس وحيد لـ (C) من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فإنه يوجد مماسان لها من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطتها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A.

ب- خاصة

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow A \text{ عند } (C) \text{ مماس للدائرة } (C)$$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \Leftrightarrow$$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها
(D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A اذا وفقط اذا كان $\forall M \in (D) \quad \overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega A} = r^2$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطتها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0; y_0)$

لتكن $M(x; y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x-a)(x-x_0) + (y-b)(y-y_0) = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - a(x+x_0) - b(y+y_0) + c = 0$$

$$\text{حيث } c = a^2 + b^2 - r^2$$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، إذا كانت (C) دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
فإن معادلة المماس لها عند $A(x_0; y_0)$ هي $xx_0 + yy_0 - a(x+x_0) - b(y+y_0) + c = 0$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم و شعاعها r عند النقطة $A(x_0; y_0)$ هي $xx_0 + yy_0 - r^2 = 0$

تمرين

نعتبر الدائرة (C): $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

تأكد أن $A(1; 2) \in (C)$ حدد معادلة للمماس لـ (C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم . نعتبر الدائرة (C)

التي معادلتها $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2; 3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A