

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- الجداء السلمي (تذكير و إضافات)

1- أنشطة

1- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد منظم النقط $C(-1;-3)$; $B(3;2)$; $A(1;-2)$

$$\text{أحسب } AB \text{ ; } \|3\overline{AC}\| \text{ ; } \|-2\overline{AB} + 3\overline{AC}\|$$

2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد منظم المستقيمين

$$(D): x + 2y - 4 = 0 \text{ ; } (\Delta): 2x - y - 3 = 0$$

أ- حدد إحداثيتي النقطة A ، تقاطع (D) و (Δ)

ب- تأكد أن $B(-2;3) \in (D)$ و $C(1;-1) \in (\Delta)$

$$\text{قارن } BC^2 \text{ و } AB^2 + AC^2$$

$$\text{أحسب } \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

ماذا تستنتج

3- A و B نقطتان مختلفتان من المستوى (P) ، قياس α الزاوية $[\widehat{AOB}]$ و $\overline{OA} = \vec{u}$; $\overline{OB} = \vec{v}$

(a) أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في الحالتين التاليتين

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ ; } \|\vec{v}\| = 5 \text{ ; } \|\vec{u}\| = 6$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ ; } \|\vec{v}\| = 5 \text{ ; } \|\vec{u}\| = \sqrt{3}$$

(b) حدد α في الحالتين التاليتين

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{2} \text{ ; } \|\vec{v}\| = 4 \text{ ; } \|\vec{u}\| = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 \text{ ; } \|\vec{v}\| = 4 \text{ ; } \|\vec{u}\| = 3$$

4- لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين حيث $\vec{v}^2 = 5$; $\vec{u}^2 = 3$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

$$\text{أحسب } (3\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v})$$

2- تعاريف

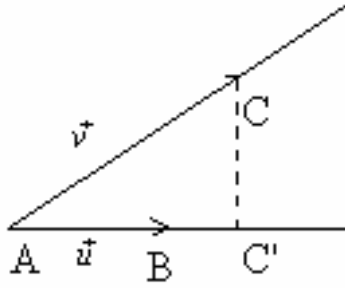
أ- الجداء السلمي لمتجهتين

(a) تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث

$$\overline{AB} = \vec{u} \text{ ; } \overline{AC} = \vec{v} \text{ و } C' \text{ المسقط العمودي لـ } C \text{ على } (AB)$$

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC}$



(b) لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين و θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و O نقطة من المستوى ، توجد نقطتان

$$\overline{OB} = \vec{v} \quad ; \quad \overline{OA} = \vec{u}$$

بما أن $-\pi < \theta \leq \pi$ فإن $|\theta|$ هو قياس للزاوية الهندسية $[\widehat{AOB}]$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \cos[\widehat{AOB}] \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos|\theta|$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) \quad \text{لأن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad \text{إذن}$$

ليكن α قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

$$\cos \theta = \cos \alpha \quad \text{و بالتالي } \theta \equiv \alpha \quad [2\pi] \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha \quad \text{إذن}$$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

ملاحظة

*- إذا كانت \vec{u} أو \vec{v} منعدمة فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

*- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير منعدمتين فإن $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

تمرين أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ حيث $\frac{-89\pi}{6}$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 4$

ب - خاصيات

مهما كانت المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} و العدد الحقيقي α

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

ج- تعامد متجهتين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

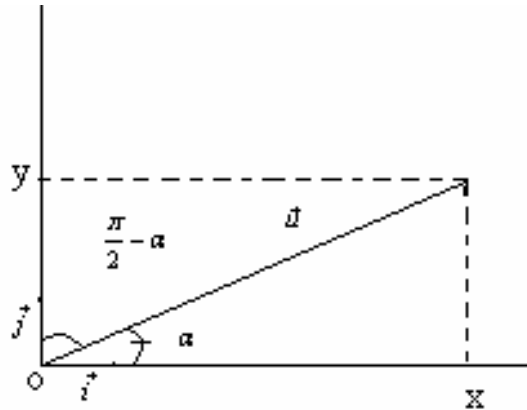
ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x; y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم

$$(\vec{i}; \vec{j}) \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y$$

أمثلة أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في الحالات.....

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x; y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و α قياس $(\vec{i}; \vec{u})$



لدينا $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$; $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$

$$x = \|\vec{u}\| \|\vec{i}\| \cos \alpha \quad \text{ومنه} \quad y = \|\vec{u}\| \|\vec{j}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \quad \text{إذن} \quad y = \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

خاصية

إذا كان $(x; y)$ زوج إحداثيات متجهة غير منعدمة \vec{u} بالنسبة لأساس متعامد منظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j})$ و α قياس

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \quad \text{فان } (\vec{i}; \vec{u})$$

حالة خاصة

إذا كانت \vec{u} متجهة واحدة (أي $\|\vec{u}\| = 1$) فان $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x; y)$ زوج إحداثيات \vec{u} بالنسبة لأساس متعامد منظم $(\vec{i}; \vec{j})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

* إذا كان $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ فان

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

\vec{u} و \vec{v} متجهتان حيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

تمرين

حدد المتجهات الواحدة و المتعامدة مع $\vec{u}(-1; 2)$

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \dots\dots\dots$$

تمرين نعتبر $A(1; 3)$ $B(3; 1)$ $C(-3; -1)$

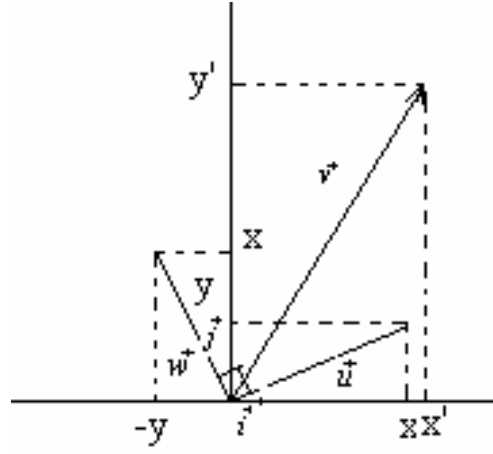
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\sin \theta$ و $\cos \theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ و θ قياس $(\vec{u}; \vec{v})$ فان $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$

* نعتبر المتجهة \vec{w} بحيث $[\vec{u}; \vec{w}] = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$



$$\overline{(\vec{v}; \vec{w})} = \overline{(\vec{u}; \vec{w})} - \overline{(\vec{u}; \vec{v})}$$

لدينا باستعمال علاقة شال

$$\overline{(\vec{v}; \vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \text{نعلم أن}$$

$$\sin \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u}; \vec{v}) \quad \text{لدينا}$$

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{إذن}$$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ حيث $\vec{u}(-\sqrt{3}; -3)$ و $\vec{v}(-1; \sqrt{3})$. حدد θ .

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة

عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت \vec{n} منظمية على (D) فإن كل متجهة $k\vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}^*$) منظمية عليه.

* إذا كانت \vec{n} و \vec{n}' متجهتين منظمتين على مستقيم (D) فإنهما تكونان مستقيمتين.

* إذا كانت $\vec{u}(a; b)$ موجهة ل (D) فإن المتجهة $\vec{n}(-b; a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a; b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$$\vec{u}(-b; a) \text{ مستقيمتان } \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \vec{n}$$

$M \Leftrightarrow$ تنتمي إلى المستقيم المار من A والموجه

بالاتجاه $\vec{u}(-b;a)$.

إن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A والموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax + by + c = 0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A والموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D) فإن معادلة (D) على شكل $ax + by + c = 0$

إذا كان $ax + by + c = 0$ فإن (D) منظمية على (D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمتان التاليتان

$$(D_1): 3x - 2y + 1 = 0 ; (D_2): 2y - 1 = 0$$

$$(D_3): x - 3 = 0$$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و \vec{u} منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لوسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$$(D): ax + by + c = 0 \quad (D'): a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{حيث } (a';b') \neq (0;0) ; (a;b) \neq (0;0)$$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

نتيجة

$$(D): y = mx + p \quad (D'): y = m'x + p'$$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (D) المستقيم المار من $B(x_B; y_B)$ و $\vec{n}(a; b)$ منظمية عليه. لتكن $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى ، H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

أ- أحسب $\vec{n} \cdot \overline{BA}$ بدلالة \overline{HA} و \vec{n}

$$HA = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{BA}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{ب- أثبت أن}$$

د- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a; b) \neq (0; 0)$

$$HA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{بين أن}$$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a; b) \neq (0; 0)$ و $A(x_0; y_0)$ نقطة من المستوى

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{مسافة النقطة } A \text{ عن المستقيم } (D) \text{ هي}$$

تمرين

$$A(-2; 3) ; \quad (D): 3x - 4y + 1 = 0$$

$$\text{حدد } d(A; (D))$$

تمرين

أحسب احداثي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3; 5)$

$$\text{على المستقيم } (D): x - 2y + 8 = 0$$