تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- الجداء السلمي (تذكير و إضافات)

1- أنشطة

1- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم النقط $A(1;-2)$; $B(3;2)$; $C(-1;-3)$

أحسب AB ; $\left\|3\overrightarrow{AC}\right\|$; $\left\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right\|$

2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم المستقيمين

$(D):\ x+2y-4=0$; $(\Delta):\ 2x-y-3=0$

أ- حدد إحداثيتي النقطة A **، تقاطع** (D) **و** (Δ)

ب- تأكد أن $B(-2;3)\in(D)$ **و** $C(1;-1)\in(\Delta)$

قارن AB^2+AC^2 **و** BC^2

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ماذا تستنتج

3- A **و** B **نقطتان مختلفان من المستوى** (P) **،** α **قياس الزاوية** $\left[\widehat{AOB}\right]$ **و** $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

$a)$ **أحسب** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **في الحالتين التاليتين**

$\|\vec{u}\|=6$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

$b)$ **حدد** α **في الحالتين التاليتين**

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=6\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$

4- لتكن $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **متجهتين حيث** $\vec{u}^2=3$; $\vec{v}^2=5$ **و** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

أحسب $(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

2- تعاريف

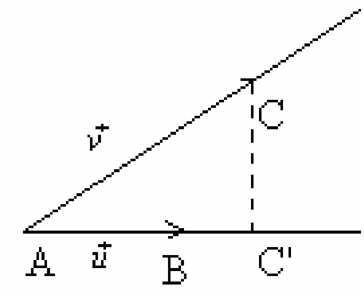
أ- الجداء السلمي لمتجهتين

$a)$ تعريف

لتكن $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **متجهتين غير منعدمتين . نعتبر** A **و** B **و** C **ثلاث نقط من المستوى حيث**

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ **و** C' **المسقط العمودي لـ** C **على** (AB)

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و θ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و O نقطة من المستوى ، توجد نقطتان وحيدتان حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

بما أن $-\pi \prec \theta \le \pi$ فان $|\theta|$ هو قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OB\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos|\theta|$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ لأن $\cos\theta=\cos(-\theta)$

ليكن α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

ومنه $\theta\equiv\alpha \quad [2\pi]$ و بالتالي $\cos\theta=\cos\alpha$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

ملاحظة

*- إذا كانت $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدمة فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

*- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين فان $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

تمرين أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث $\dfrac{-89\pi}{6}$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$

ب – خاصيات

مهما كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و العدد الحقيقي α

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$$
$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

ج- تعامد متجهتين

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

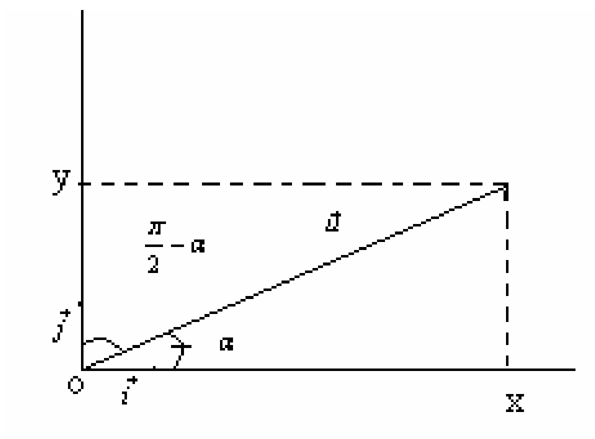
إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

ملاحظة **إذا كان $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان** $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$; $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$

أمثلة **أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالات.................**

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$



لدينا $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$; $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$

ومنه $x=\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|\cos\alpha$ $\qquad y=\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

إذن $x=\|\vec{u}\|\cos\alpha$ $\qquad y=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

خاصية

إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j})$ و α قياس

$(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$ فان $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$

حالة خاصة

إذا كانت $\vec{u}$ متجهة واحدية (أي $\|\vec{u}\|=1$) فان $\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
* إذا كان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ فان

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

تمرين

حدد المتجهات الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(-1;2)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \|\vec{v}\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\;..........$$

تمرين نعتبر $C(-3;-1)$ $B(3;1)$ $A(1;3)$

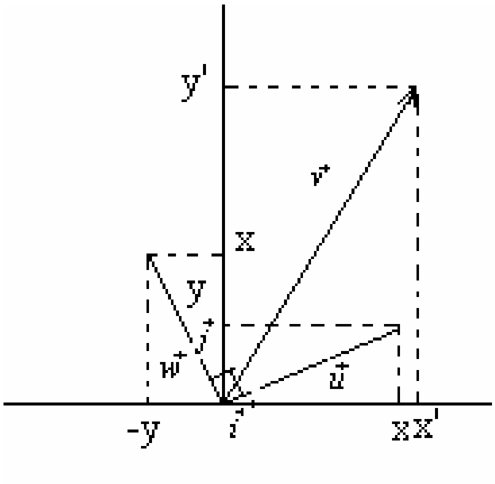
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ و θ قياس $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ فان $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

* نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\dfrac{\pi}{2}\;[2\pi]$ $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \overline{(\vec{u};\vec{w})} - \overline{(\vec{u};\vec{v})}$

$$\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|}$$

لدينا $\vec{v}\cdot\vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$

إذن $\sin\theta = \dfrac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ حيث $\vec{u}(-\sqrt{3};-3)$ و $\vec{v}(-1;\sqrt{3})$. حدد θ.

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (D) فان كل متجهة $k\vec{n}$ ، $(k \in \mathbb{R}^*)$ منظمية عليه.

* إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فانهما تكونان مستقيميتين .

* اذا كانت $\vec{u}(a;b)$ موجهة ل(D) فان المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه

بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax+by+c=0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D) فان معادلة (D) على شكل $ax+by+c=0$

إذا كان $(D):\ ax+by+c=0$ فان $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$$(D_1)3x-2y+1=0 \quad ; \quad (D_2):2y-1=0$$
$$(D_3):x-3=0$$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'):a'x+b'y+c'=0$ $\quad$ $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a';b')\neq(0;0)$; $(a;b)\neq(0;0)$

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0$$

نتيجة

$(D): y = mx + p \qquad (D'): y = m'x + p'$

$(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) **منسوب إلى معلم متعامد ممنظم** $(O;\vec{i};\vec{j})$. (D) **المستقيم المار من** $B(x_B;y_B)$ **و** $\vec{n}(a;b)$ **منظمية عليه. لتكن** $A(x_0;y_0)$ **نقطة من المستوى ،** H **المسقط العمودي للنقطة** A **على** (D).

أ- أحسب $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ **بدلالة** $\overrightarrow{HA}$ **و** $\vec{n}$

ب- أثبت أن $HA = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{\|\vec{n}\|}$

د- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ **حيث** $(a;b) \neq (0;0)$

بين أن $HA = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

خاصية

المستوى (P) **منسوب إلى معلم متعامد ممنظم** $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(D): ax + by + c = 0$ **حيث** $(a;b) \neq (0;0)$ **و** $A(x_0;y_0)$ **نقطة من المستوى**

مسافة النقطة A **عن المستقيم** (D) **هي** $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين

$A(-2;3) \quad ; \quad (D): 3x - 4y + 1 = 0$

حدد $d(A;(D))$

تمرين

أحسب احداثيثي النقطة H **المسقط العمودي للنقطة** $A(-3;5)$

على المستقيم $(D): x - 2y + 8 = 0$