

دراسة تحليلية لدائرة

I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها

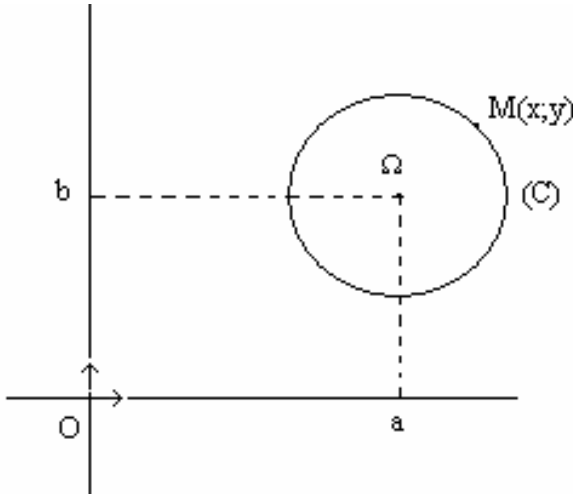
في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، نعتبر دائرة (C)

مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r ($r \geq 0$)

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r ($r \geq 0$) هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2 + y^2 = r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 4

2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $A(2;3)$ و تمر من النقطة $B(1;-3)$

ملاحظة

$$* \text{ بوضع } c = a^2 + b^2 - r^2$$

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r تكتب على شكل $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

* نعتبر $\{\Omega\}$ دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

إذا كان $a^2 + b^2 - c < 0$ فإن $(E) = \emptyset$

إذا كان $a^2 + b^2 - c = 0$ فإن $(E) = \{\Omega(a; b)\}$

إذا كان $a^2 + b^2 - c > 0$ فإن $(E) = C(\Omega(a; b); r)$ حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 - c \geq 0$

مركز هذه الدائرة هو $\Omega(a; b)$ وشعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

تمرين

$$x^2 + y^2 - 2x + y + 7 = 0$$

حدد (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث

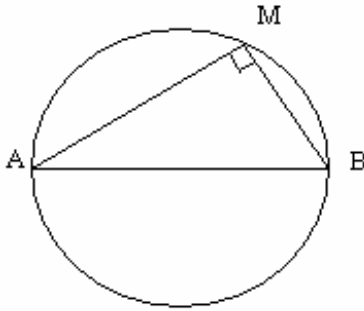
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$$

حدد (E') مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث

3- معادلة معرف بأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A; y_A)$

و $B(x_B; y_B)$



$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين

مجموعة النقط M حيث $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4- تمثيل بارامتري لدائرة

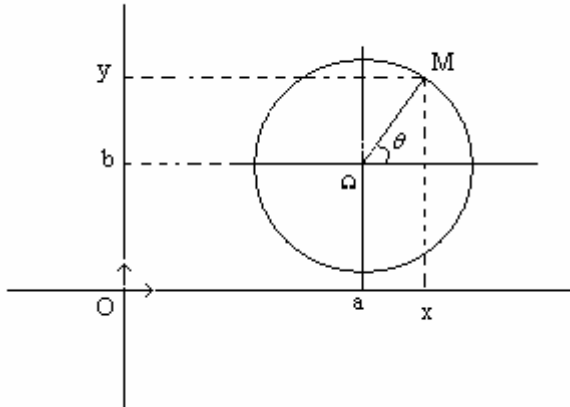
في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x-a}{r} = \cos \theta \\ \frac{y-b}{r} = \sin \theta \end{cases}$$

ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0;2\pi[$ حيث



$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r ($r > 0$) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ تحقق}$$

تسمى تمثيلا بارامتري لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r $\theta \in \mathbb{R}$ النظمة $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$

حالة خاصة

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

التمثيل البارامتري للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي

تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

$$c = a^2 + b^2 - r^2 \text{ نعتبر}$$

$$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x;y) \in (C)$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Omega M < r \Leftrightarrow (C) \text{ داخل } M$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0 \Leftrightarrow$$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$

- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$

تمرين

حل مبيانيا

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 < 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1) \leq 0$$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r

* إذا كان $d(\Omega; (D)) > r$ فإن $(D) \cap (C) = \emptyset$

* إذا كان $d(\Omega; (D)) = r$ فإن $(D) \cap (C)$ أحادية

* إذا كان $d(\Omega; (D)) < r$ فإن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

$$1- (C) = C(\Omega(1; -2); 2) \text{ و } (D): x + 2y - 1 = 0$$

$$2- (C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \text{ و } (D): 3x + 4y - 6 = 0$$

$$3- (C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \text{ و } (D): 3x + 4y - 5 = 0$$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega; (D)) = r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فإنه لا يوجد أي مماس لها مار من A

إذا كان $A \in (C)$ فإنه يوجد مماس وحيد لـ (C) مار من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فإنه يوجد مماسان لها ماران من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطتها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A .

ب- خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow A \text{ عند } (C) \text{ مماس للدائرة}$$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \Leftrightarrow$$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

$$\forall M \in (D) \quad \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \quad (D) \text{ مماس للدائرة } (C) \text{ عند النقطة } A \text{ اذا وفقط اذا كان}$$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطتها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0; y_0)$

لتكن $M(x; y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x-a)(x-x_0) + (y-b)(y-y_0) = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - a(x+x_0) - b(y+y_0) + c = 0$$

$$\text{حيث } c = a^2 + b^2 - r^2$$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. إذا كانت (C) دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ فإن

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0 \text{ هي معادلة المماس لها عند } A(x_0; y_0)$$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r عند النقطة $A(x_0; y_0)$ هي $xx_0 + yy_0 - r^2 = 0$

تمرين

نعتبر الدائرة $(C): x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

تأكد أن $A(1; 2) \in (C)$ حدد معادلة للمماس لـ (C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر الدائرة (C)

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \text{ التي معادلتها}$$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2; 3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A