المرجــــــــح

تمارين مقترحة

من اقتراح أذ : لخريسـي سـمير

تمرين 1

A و B و C نقط غير مستقيمية ، لتكن G مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

1- اكتب $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ ثم أنشئ النقطة G

2- باستعمال تجميعية المرجح أنشئ النقطة G

تمرين 2

A و B نقطتان مختلفتان.

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1- بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-3)$ و $(B,1)$

2- بين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-6)$ و $(A,4)$

تمرين 3

A و B نقطتان مختلفتان.

1- أنشئ E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,3)$ و $(B,-1)$

2- أنشئ F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,-3)$

3- بين أن القطعتين $[AB]$ و $[EF]$ لهما نفس المنتصف .

تمرين 4

ABC مثلث حيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$

1- أنشئ النقط :

I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

2- أنشئ G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$

3- بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

تمرين 5

ABC مثلث .نعتبر النقطتين E و D حيث : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1- عبر عن D كمرجح للنقطتين A و B

2- عبر عن E كمرجح للنقطتين C و D

3- بين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة : $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$

4- لتكن H مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(E,3)$.

بين أن النقط B و C و H مستقيمية

تمرين 6

www.naja7math.com

ABC مثلث . لتكن O منتصف $[BC]$ و لتكن H مرجح النظمة المتزنة $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$

1- بين أن $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ ثم أنشئ النقطة H

2- لتكن G مركز ثقل المثلث ABC ، بين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$

تمرين 7

www.naja7math.com

$ABCD$ متوازي أضلاع .

لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$

و F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

3- ماذا تستنتج ؟

تمرين 8

www.naja7math.com

ABC مثلث .

لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$

و F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن $(CF)//(AE)$

تمرين 9

www.naja7math.com

ABC مثلث . E و I و F نقط حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$

1- عبر عن E و I و F كمرجح للنقط A ، B أو C

2- برهن أن النقط E و I و F مستقيمية.

تمرين 10

www.naja7math.com

المستوى منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط $A(3,0)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$.

ليكن E منتصف $[BC]$ و G مرجح النقطتين المتزنتين $(E,2)$ و $(A,1)$

1- أوجد إحداثيتي كل من E و G

2- استنتج أن النقط O و G و C مستقيمية.

تمرين 11

ABC مثلث .

1- حدد $\left(\mathrm{E}_1\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ ثم أنشئها .

2- حدد $\left(\mathrm{E}_2\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ ثم أنشئها .

3- حدد $\left(\mathrm{E}_3\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|4\overrightarrow{CM}\right\|$ ثم أنشئها .

www.naja7math.com

تمرين 12

ABC مثلث حيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $BC = 5$. G مركز ثقل المثلث ABC .

1- حدد و أنشئ $\left(\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$.

2- حدد و أنشئ $\left(\Delta\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$.

3- حدد و أنشئ $\left(L\right)$ مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\|$.

بالتوفيق

من اقتراح أذ : لخريسي سمير

المرجـــــح

حلـــول مقترحة

تمرين 1

1

لدينا G مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

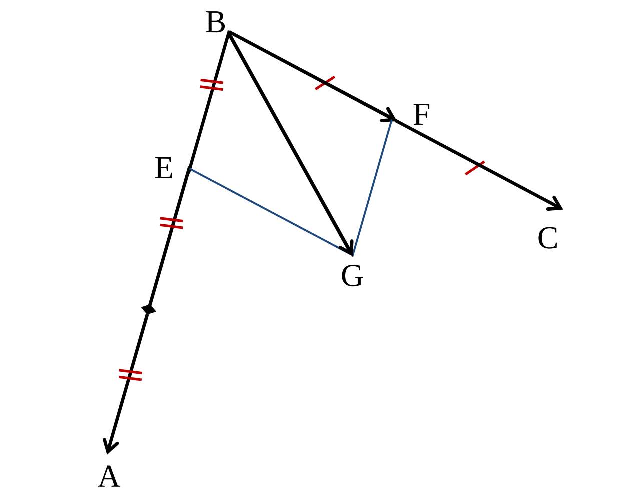
$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{GB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{GC}$$

نأخذ : $M = B$ فنجد : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

: لأجل الإنشاء أنشأنا أولا النقطة E حيث $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

ثم النقطة F حيث $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ثم أنشأنا G حيث :

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ أي $BEGF$ متوازي الأضلاع



2

لتكن K مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$

بما أن G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

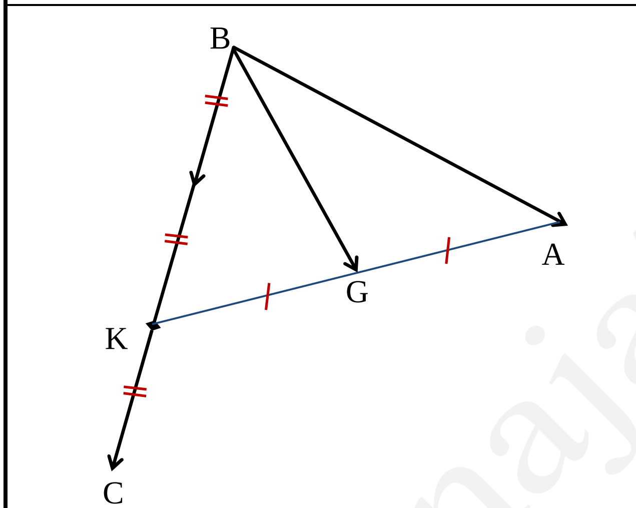
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح $(K,3)$ و $(C,3)$

أي منتصف $[CK]$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ : $M = B$ فنجد : $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$



: لاحظ أنه رغم اختلاف الطريقتين إلا أن موضع النقطة G لا يتغير.

تمرين 2

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1

نبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-3)$ و $(B,1)$ يعني أي نبين : $-3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ منه $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

منه : $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ بالتالي : $-3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2

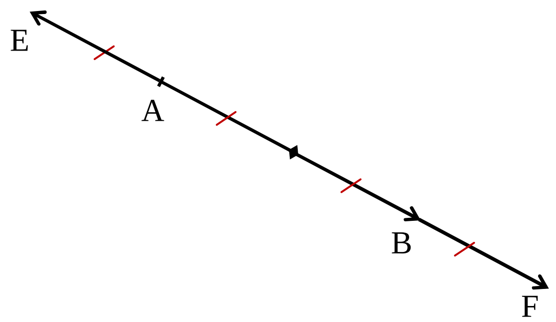
نبين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-6)$ و $(A,4)$ أي نبين : $-6\overrightarrow{BG} + 4\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ منه $2(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

منه : $2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ منه $3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ منه $-3\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ بالتالي : $-6\overrightarrow{BG} + 4\overrightarrow{BA} = 2\vec{0} = \vec{0}$

: الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 3



1

لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,3)$ و $(B,-1)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{ME} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{-1}{2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

2

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,-3)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MF} = \frac{1}{-2}\overrightarrow{MA} + \frac{-3}{-2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3

لتكن : I منتصف $[AB]$ و لنبين أن I هي أيضا منتصف $[EF]$ أي لنبين أن $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$

<u>الطريقة الأولى</u>:

لدينا : $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{IA} + \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

<u>الطريقة الثانية</u>:

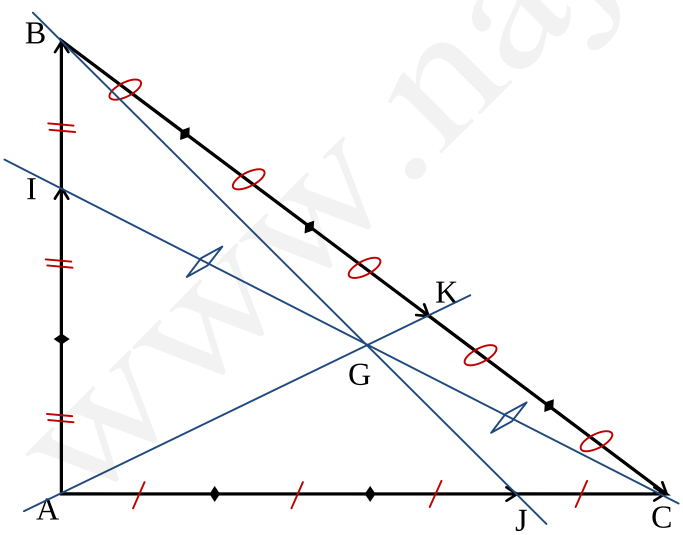
باستعمال الخاصية المميزة للمرجح بالنسبة لـ $M = I$ المستعملة في السؤالين السابقين نجد أن:

$\overrightarrow{IE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{-1}{2}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{IA} + \left(\frac{3}{2} + \frac{-1}{2}\right)\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

: الخاصية المميزة للمرجح مفيدة في إنشاء المرجح و في كثير من البراهين.

تمرين 4



1

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و$(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$	2
بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G\in(BJ)$ لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G\in(AK)$ و حسب السؤال السابق $G\in(IC)$ بالتالي : المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G	3
: خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمية مع هاتين النقطتين.	

تمرين 5

www.naja7math.com

$$2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$$

لدينا $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه : $-\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه : E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$	2	لدينا $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ منه : D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$	1

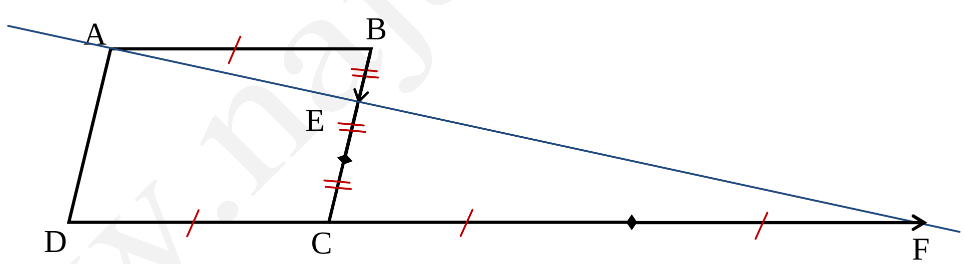
لبين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة : $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$ أي لنبين أن : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$ لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CD}$ (1) و لدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (2) من (1) و (2) نستنتج أن : $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$ أي : $\overrightarrow{CE}=\frac{-2}{6}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي : $6\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ بالتالي : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$	3
: يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.	
لبين أن النقط B و C و H مستقيمية . لدينا H مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(E,3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(E,6)$ و بما أن C مرجح : $(A,2);(B,1);(E,6)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح : $(B,1);(H,8)$ بالتالي النقط B و C و H مستقيمية .	4
: للبرهان على الاستقامية يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين. الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل	

تمرين 6

	O منتصف $[BC]$ و H مرجح $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$
1	لنبين أن $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ لدينا : H مرجح $(C,2);(B,2);(A,-1)$ إذن $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M=O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ منه : $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ (لأن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$)
2	لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(C,1);(B,1);(A,1)$ إذن : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ : $M=O$ نجد : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ بالتالي : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

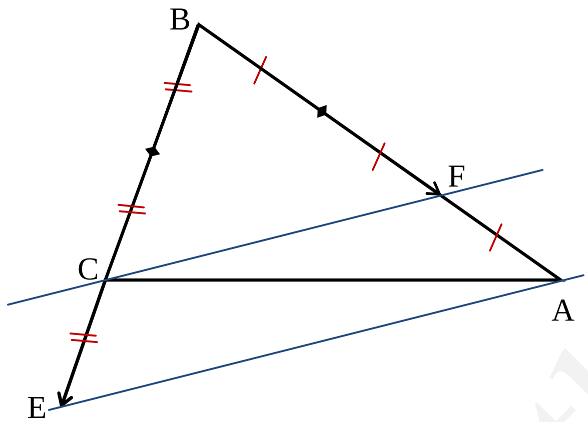
www.naja7math.com

تمرين 7

1	لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{3}{1}\overrightarrow{MC}+\frac{-2}{1}\overrightarrow{MD}$ نأخذ: $M=D$ فنجد أن: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}$
		
2	لنبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$ لدينا: $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DF}=$ $=3\overrightarrow{DC}+3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{DC}$ $=\vec{0}$	
3	نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.	

تمرين 8

1	لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{-2}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$	لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$



2 لنبين أن $(CF)//(AE)$ ، لدينا: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

منه : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$ بالتالي $(CF)//(AE)$

www.naja7math.com

تمرين 9

1

- لدينا $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\vec{0}$

منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه : $7\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه: $-7\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(A,-7)$ و $(B,2)$

- لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجح النقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$
- لدينا $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$ منه $9\overrightarrow{CF}=7\overrightarrow{CA}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}\right)=\vec{0}$

منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه : $2\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه: $-2\overrightarrow{FC}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(C,-2)$ و $(A,-7)$ (أو أيضا $(C,2)$ و $(A,7)$ خاصية الصمود)

2

لدينا E مرجح $(A,-7)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-7}{-5}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{-5}\overrightarrow{MB}$

لدينا F مرجح $(C,2)$ و $(A,7)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{MC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{MA}$

نأخذ: $M=I$ فنجد أن: $\overrightarrow{IE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{IA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{IC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

و لدينا I منتصف $[BC]$ منه : $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IF}=\frac{-2}{9}\overrightarrow{IB}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

إذن : $9\overrightarrow{IF}=-2\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IA}$ و $5\overrightarrow{IE}=7\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}$ منه : $9\overrightarrow{IF}=5\overrightarrow{IE}$ أي $\overrightarrow{IF}=\frac{5}{9}\overrightarrow{IE}$

بالتالي : النقط E و I و F مستقيمية.

تمرين 10

$A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$

1 لدينا E منتصف $[BC]$ منه : $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$ منه: $E\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$

لدينا G مرجح $(E,2)$ و $(A,1)$ منه : $\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_E + x_A}{3} = \dfrac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{2y_E + y_A}{3} = \dfrac{4+4}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ منه: $G\left(2\,;\dfrac{8}{3}\right)$

2 لدينا: $\overrightarrow{OE}\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$ و $\overrightarrow{OG}\left(2\,;\dfrac{8}{3}\right)$ و لدينا : $\det\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OE}\right) = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - \dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{2} = 4-4=0$

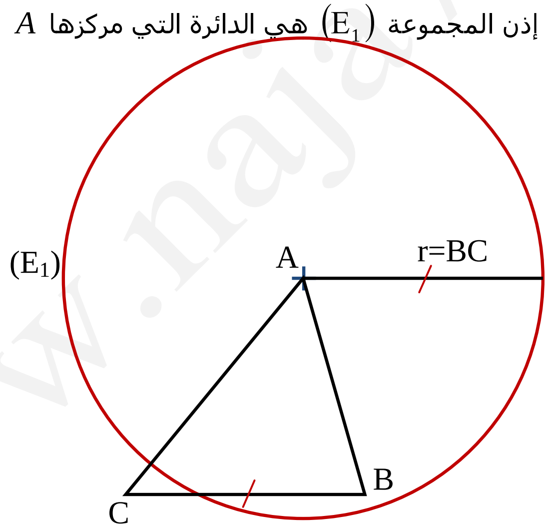
بالتالي : O و G و C مستقيمية.

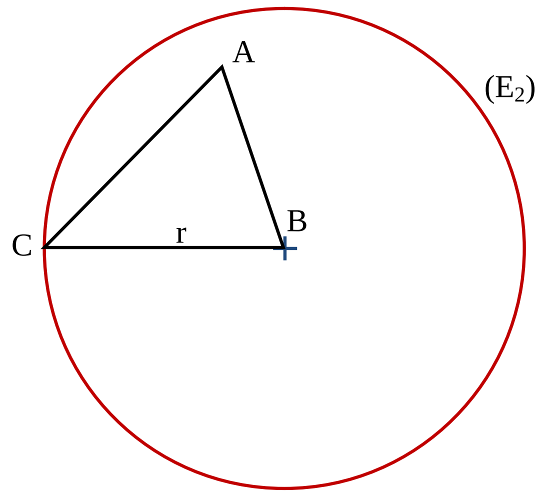
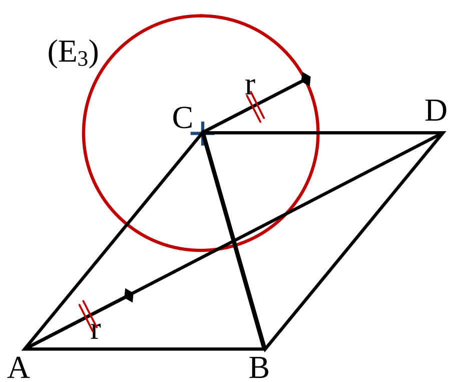
: **تذكير:** إحداثيتا مرجح $(A,\sim)$ و $(B,\ )$ و ... و $(K,ª)$ هي : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sim x_A + \ \ x_B + \ldots + ª\, x_K}{\sim + \ \ + \ldots + ª} \\ y_G = \dfrac{\sim y_A + \ \ y_B + \ldots + ª\, y_K}{\sim + \ \ + \ldots + ª} \end{cases}$

تمرين 11

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

1 لدينا : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$



لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\Vert \overrightarrow{BM} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right\Vert$ لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$: منه $\left\Vert \overrightarrow{BM} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{CB} \right\Vert$ أي : $BM = BC$ بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$  	2
لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\Vert 4\overrightarrow{CM} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right\Vert$ نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي $ABDC$ متوازي أضلاع) منه : $\left\Vert 4\overrightarrow{CM} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{AD} \right\Vert$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \dfrac{AD}{4}$ بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R = \dfrac{AD}{4}$  	3

تمرين 12

لنحدد (ء) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\Vert \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\Vert = 6$ نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ منه : $\left\Vert 3\overrightarrow{MG} \right\Vert = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$ بالتالي (ء) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = 2$	1
لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\Vert \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\Vert$ نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$) و النقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ منه : $\left\Vert 2\overrightarrow{MI} \right\Vert = \left\Vert 2\overrightarrow{MJ} \right\Vert$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$ بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$	2

3	لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\\|=\left\\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\\|$ نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M\in(P)\ 4\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ منه : $\left\\|4\overrightarrow{MG}\right\\|=\left\\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}\right\\|$ أي $\left\\|4\overrightarrow{MG}\right\\|=\left\\|\overrightarrow{CB}\right\\|$ أي $MG=\dfrac{BC}{2}$ بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r=\dfrac{BC}{2}$
	: لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق. لا حظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن و في حال كان مجموع المعاملات منعدما(كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)

بالتوفيق